

## РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ И ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

УДК 519.722

### АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИЗМЕРЕНИЮ ИНФОРМАТИВНОСТИ ЗНАКОВЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ\*

© 2011 г. А. Г. Броневиц, А. В. Гончаров

Таганрог, Технологический ин-т Южного федерального ун-та

Поступила в редакцию 10.11.09 г., после доработки 04.05.10 г.

Вводится знаковое представление изображений и исследуются его основные свойства. В частности, обсуждается задача измерения информативности знаковых представлений. Для этого строятся аксиоматические меры информативности изображений и их знаковых представлений. Показано, что данные меры очень близки по свойствам к энтропии Шеннона. Статья также содержит результаты расчета значений введенных мер информативности для модельных и реальных изображений.

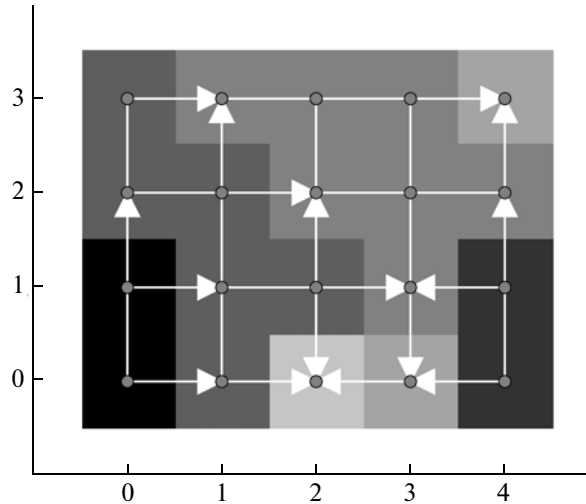
**Введение.** Многие задачи распознавания образов эффективно решаются с помощью алгоритмов, основанных на знаковом представлении изображений. В [1] знаковые представления изображений рассматривались для задачи детекции лиц, которая заключается в поиске участков изображения, содержащих лица и не включающих в себя элементы фона. Детекция лиц является важным предварительным этапом для распознавания лиц, их идентификации, определения пола и возраста, распознавание эмоций и др. В работах [1, 2] данный подход использовался для идентификации лиц, когда по лицу-запросу осуществляется поиск наиболее похожих лиц, содержащихся в базе изображений. Применение знакового представления изображений в моделях активных контуров [2] позволяет эффективно с вычислительной точки зрения решать задачу локализации антропометрических признаков лица, таких, как контуры бровей, координаты уголков глаз и центров зрачков, контуры носа и губ, овал лица. Знаковое представление изображений хорошо зарекомендовало себя и при поиске нечетких дубликатов в больших коллекциях изображений [3]. Данная задача актуальна, например, для поисковых систем [4, 5], поскольку одним из критериев “качества” информационного поиска является разнообразие результатов запроса. Кроме того, обнаружение нечетких дубликатов представляет большой интерес при борьбе со спамом [6], распространяемым в виде графических файлов. Идея перехода от исходного представления сигнала или изображения к знакам некоторого функционала достаточно широко используется как в распознавании образов, так и в анализе случайных процессов.

Один из аналогов знакового представления – описание формы объекта с помощью цепного кода, предложенного впервые Фрименом (Н. Freeman) [7]. Цепной код – это способ задания контура с помощью последовательности смежных пикселей, т.е.  $(x_i)_{i=1}^N$ , где двумерные векторы  $x_i$  имеют целочисленные координаты, причем если  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = (l, m)$ , где  $i \in \{1, \dots, N-1\}$ , то  $l, m \in \{-1, 0, 1\}$ . Поэтому в цепном коде положение следующего пикселя относительно предыдущего кодируется парой чисел  $(l, m)$  или, что эквивалентно, их знаками. Таким образом, цепной код можно рассматривать в качестве одного из примеров знакового представления информации.

Наиболее близким аналогом знакового представления является хорошо известный морфологический подход, предложенный Ю.П. Пытьевым [8]. В основе морфологии Пытьева лежит идея разбиения изображения на участки, соответствующие постоянной яркости изображения, при этом само изображение представляется в виде взвешенной суммы ортогональных характеристических функций, которые отличны от нуля лишь на подмножествах, соответствующих областям постоянных значений яркости. Множество изображений, которые могут быть получены из исходного изображения действием некоторой функции на значения яркости, называется “формой” изображения [9, 10]. В предлагаемом подходе рассматривается полное и оконные знаковые представления. Множество изображений, отвечающих полному знаковому представлению, совпадает с понятием формы по Пытьеву в классе строго возрастающих преобразований яркости. Однако множество изображений, получаемых на основе оконного знакового представления, шире, чем форма изображений по Пытьеву.

Несмотря на широкий спектр задач, решаемых при помощи знакового представления изображений, системного изучения его свойств до настоящего времени не проводилось, при этом наибольший

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 08-07-00135; 10-07-00478).



**Рис. 1.** Пример оконного знакового представления (1.2), когда окрестность каждого пикселя состоит из непосредственно примыкающих пикселей

интерес вызывает вопрос о мере информативности такого представления изображений. Меры информативности специального вида использовались в методах обработки изображений в [11–13]. В рамках данной работы предлагается аксиоматический подход к введению мер информативности на изображениях и соответствующих им знаковых представлениях, а также мера неопределенности знакового представления, описывающая количественно потери информации при переходе от изображения к его знаковому представлению.

**1. Знаковое представление изображений.** Под изображением будем понимать неотрицательную целочисленную функцию  $f = f(x_1, x_2)$ , заданную в точках целочисленной сетки  $\Omega = I_N \times I_M = \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, M\}$ , т.е.  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$ . Пару чисел  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,  $x_1 \in I_N, x_2 \in I_M$ , будем именовать *пикселем*, а  $f(\mathbf{x})$  – значением яркости изображения  $f$  в пикселе  $\mathbf{x}$ . Множество всех изображений  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$  обозначим через  $\mathcal{F}$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** Отношение  $\tau \subseteq \Omega \times \Omega$  назовем знаковым представлением изображения  $f \in \mathcal{F}$ , если выполняются следующие условия:

- 1) если  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \in \tau$ , то  $f(\mathbf{x}_i) \leq f(\mathbf{x}_j)$ ;
- 2) если  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \in \tau$ , а  $(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i) \notin \tau$ , то  $f(\mathbf{x}_i) < f(\mathbf{x}_j)$ .

В качестве примеров рассмотрим некоторые способы введения знакового представления на изображениях. Под *полным знаковым представлением* будем понимать такое, которое обладает свойством связности, т.е. содержит все пары точек изображения  $f$

$$\tau_c = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega^2 | f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})\}. \tag{1.1}$$

Отметим, что полное знаковое представление изображения  $f$  однозначно определяется условием связности отношения. Введем также *оконное знаковое представление* – компактный вариант знакового представления, когда учитываются лишь отношения на смежных пикселях

$$\tau_\varepsilon = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega^2 | f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y}), \mathbf{y} \in O_\varepsilon(\mathbf{x})\}, \tag{1.2}$$

где  $O_\varepsilon(\mathbf{x})$  – окрестность точки  $\mathbf{x}$ , например

$$O_\varepsilon(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \Omega | \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \varepsilon\}, \tag{1.3}$$

где  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ .

На рис. 1 приведен пример оконного знакового представления. Отметим, что для прикладных задач именно оконное знаковое представление (1.2) с окрестностью (1.3) представляет наибольший интерес, поэтому далее будем рассматривать знаковые представления, заданные отношениями на смежных пикселях.

Класс изображений, соответствующих знаковому представлению  $\tau$ , пометим как  $\mathcal{F}_\tau$ . Пусть  $\tau$  – это некоторое знаковое представление изображения  $f \in \mathcal{F}$  и  $\tau^{Tr}$  – транзитивное замыкание отношения  $\tau$ .

Тогда, очевидно,  $\tau^{Tr}$  является также знаковым представлением  $f$ , причем  $\mathcal{F}_{\tau^{Tr}} = \mathcal{F}_{\tau}$ . С учетом этого при анализе знаковых представлений изображений можно ограничиться рефлексивными и транзитивными отношениями (т.е. отношениями квазипорядка), множество которых обозначим через  $\mathcal{T}$ .

Множество изображений  $\mathcal{F}_{\tau}$  является аналогом понятия формы в морфологии Пытьева. Предположим, что  $\Phi$  – это семейство отображений  $\varphi: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ , моделирующих условия регистрации изображения. Тогда под формой в морфологии Пытьева понимается множество изображений  $\mathcal{V}_f = \{\varphi \circ f | \varphi \in \Phi\}$ . Легко видеть, что, если в качестве  $\Phi$  взять класс всех строго возрастающих отображений, то  $\mathcal{V}_f \subseteq \mathcal{F}_{\tau}$ . Обратное же включение  $\mathcal{F}_{\tau} \subseteq \mathcal{V}_f$  выполняется только для случая полного знакового представления изображения  $f$ , и в этой ситуации понятия формы по Пытьеву и знакового представления совпадают. Во всех остальных случаях, в частности, для оконных знаковых представлений множество  $\mathcal{F}_{\tau}$  шире, чем множество  $\mathcal{V}_f$ .

Знаковому представлению  $\tau$  изображения  $f$  можно поставить в соответствие ориентированный граф  $G_{\tau} = (\Omega, E_{\tau})$ , множество вершин которого образовано множеством  $\Omega$ , а множество дуг  $E_{\tau}$  совпадает с множеством  $\tau$ , при этом если  $(x, y) \in \tau$ , то соответствующая дуга графа направлена от вершины  $x$  к вершине  $y$ . Интерпретацию знакового представления как графа  $G_{\tau}$  удобно применять для изучения свойств знакового представления, а также для его визуализации.

Сформулируем необходимые и достаточные условия того, что произвольное отношение  $\tau$ , заданное на  $\Omega$ , является оконным знаковым представлением некоторого изображения. Для этого будем использовать графовую интерпретацию знакового представления.

Обозначим через  $E$  множество всех дуг (включая петли), которые соединяют смежные пиксели, введем также граф  $\bar{G}_{\tau} = (\Omega, E \setminus E_{\tau})$  (здесь, строго говоря, граф  $\bar{G}_{\tau}$  не является дополнительным к  $G_{\tau}$ ). Рассмотрим отношение эквивалентности  $\theta = (\tau \cap \tau^{-1})^{Tr}$ , где  $\tau^{-1}$  – это обратное отношение к  $\tau$ , т.е.  $\tau^{-1} = \{(x, y) \in \Omega^2 | (y, x) \in \tau\}$ , а также связанное с отношением  $\theta$  разбиение множества вершин  $\Omega$  на фактор-множества  $v_i$ . Отметим, что данное разбиение определяется однозначно. Если  $\tau$  – оконное знаковое представление некоторого изображения, то классы эквивалентности будут соответствовать связанным множествам пикселей, имеющих одинаковую яркость. Далее введем следующие графы на множестве  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  всех классов эквивалентности отношения  $\theta$ :  $G_{\tau}^{\theta} = (V, E_{\tau}^{\theta})$  и  $\bar{G}_{\tau}^{\theta} = (V, \bar{E}_{\tau}^{\theta})$ , где  $(v_i, v_j) \in E_{\tau}^{\theta}$ , если существует такая пара  $(x, y) \in E_{\tau}$ , что  $x \in v_i$  и  $y \in v_j$ ; аналогично,  $(v_i, v_j) \in \bar{E}_{\tau}^{\theta}$ , если имеется пара  $(x, y) \in E \setminus E_{\tau}$  такая, что  $x \in v_i$  и  $y \in v_j$ . Таким образом, граф  $G_{\tau}^{\theta} = (V, E_{\tau}^{\theta})$  представляет собой продолжение графа  $G_{\tau} = (\Omega, E_{\tau})$  на множество классов эквивалентности  $V$ . Отношение смежности пикселей можно также перенести на классы эквивалентности. Считаем, что классы эквивалентности  $v_i$  и  $v_j$  смежные, если найдутся смежные пиксели  $x \in v_i$  и  $y \in v_j$ . Если обозначить через  $E^{\theta}$  – множество всех дуг (включая петли) между смежными классами эквивалентности, то  $\bar{G}_{\tau}^{\theta} = (V, E^{\theta} \setminus E_{\tau}^{\theta})$ . В дальнейшем будем полагать, что функция  $f$  также определена на классах эквивалентности, т.е.  $f(v) = f(x)$ , если  $v \in V$  и  $x \in v$ .

Следующее утверждение дает необходимые и достаточные условия того, что произвольно заданный граф  $G_{\tau} = (\Omega, E_{\tau})$  является графом оконного знакового представлением некоторого изображения  $f$ .

**У т в е р ж д е н и е 1.** Граф  $G_{\tau} = (\Omega, E_{\tau})$  – оконное знаковое представление некоторого изображения  $f$  в том и только том случае, если:

- а)  $E_{\tau} \subseteq E$ , где  $E$  – множество всех пар смежных вершин;
- б)  $\bar{G}_{\tau}^{\theta}$  – ациклический граф;
- в)  $\bar{G}_{\tau}^{\theta}$  – асимметричный граф на множестве ребер  $E^{\theta}$ , т.е.  $(v_i, v_j) \in E_{\tau}^{\theta}$  для  $v_i \neq v_j$  тогда и только тогда, когда  $(v_j, v_i) \notin E_{\tau}^{\theta}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость.** Пусть  $G_{\tau} = (\Omega, E_{\tau})$  – граф знакового представления изображения  $f$ . Тогда  $E_{\tau} \subseteq E$  по определению. Покажем, что  $\bar{G}_{\tau}^{\theta}$  – ациклический граф. Действительно, если бы на этом графе существовал цикл, состоящий из вершин  $v_1, \dots, v_k$ , то выполнялись бы неравенства

$$f(v_1) > f(v_2) > \dots > f(v_k) > f(v_1),$$

что, очевидно, невозможно. Таким образом, необходимость доказана.

*Достаточность.* Пусть справедливы все условия утверждения. Покажем, что в этом случае существует функция  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$ , знаковым представлением которой будет граф  $G_\tau$ . Докажем это с помощью итерационной процедуры построения последовательности ациклических транзитивных графов  $G^{(k)} = (V, E^{(k)})$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , таких, что:

- 1)  $E^{(1)} = (\bar{E}_\tau^\theta)^{Tr}$ ;
- 2)  $E^{(1)} \subset E^{(2)} \subset \dots \subset E^{(n)} \subset E^\theta$ .

Данную процедуру будем продолжать до тех пор, пока на некотором шаге  $n$  граф  $G^{(n)} = (V, E^{(n)})$  не станет асимметричным, т.е. для любой пары  $(v_i, v_j) \in V \times V$  различных вершин ( $v_i \neq v_j$ ) будет выполняться условие:  $(v_i, v_j) \in E^{(n)}$  в том и только том случае, если  $(v_j, v_i) \notin E^{(n)}$ . Покажем сначала, как построить граф  $G^{(k+1)} = (V, E^{(k+1)})$  на шаге  $k$ , если построен ациклический транзитивный граф  $G^{(k)} = (V, E^{(k)})$ . Предположим, что граф  $G^{(k)}$  не является асимметричным (в противном случае дальнейшее продолжение построения графов не требуется). Тогда найдется пара вершин  $(v_i, v_j) \in V \times V$ , что  $(v_i, v_j) \notin E^{(k)}$  и  $(v_j, v_i) \notin E^{(k)}$ . Добавим к графу  $G^{(k)}$  дугу  $(v_i, v_j)$ , в результате получим граф  $(V, E^{(k)} \cup \{(v_i, v_j)\})$ . Заметим, что это будет ациклический граф, поскольку иначе существовал бы цикл  $v_1, \dots, v_i, v_j, \dots, v_k$ , содержащий дугу  $(v_i, v_j)$ , но подобное невозможно, так как в силу транзитивности графа  $G^{(k)}$  следовало бы  $(v_j, v_i) \in E^{(k)}$ , что противоречит выбору пары вершин  $(v_i, v_j)$ . Далее ищем транзитивное замыкание данного графа и выбираем  $G^{(k+1)} = (V, (E^{(k)} \cup \{(v_i, v_j)\})^{Tr})$ , который будет удовлетворять всем необходимым условиям. Отметим, что поскольку множество  $V \times V$  конечно, то непременно на каком-то шаге мы построим асимметричный ациклический, транзитивный граф  $G^{(n)}$ . Данный граф является графом некоторого отношения строгого порядка, поэтому существует функция  $f : V \rightarrow \mathbb{Z}_+$ , что  $(v_i, v_j) \in E^{(n)}$  в том и только том случае, если  $f(v_i) > f(v_j)$ . Далее распространяем функцию  $f$  с классов эквивалентности на все пиксели  $\Omega$  с помощью  $f(x) = f(v)$ , если  $x \in v$ . Очевидно, что построенная функция  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$  удовлетворяет всем необходимым условиям, т.е. доказана достаточность и утверждение в целом.

**З а м е ч а н и е 1.** В доказательстве утверждения 1 фактически показано, как строить изображения, соответствующие данному знаковому представлению. Однако, перебирая подобным образом все варианты, мы не перечислим все возможные изображения с точностью до возрастающего монотонного преобразования. Это так, поскольку все классы эквивалентности упорядочены отношением строгого порядка. Тем не менее не исключены случаи, когда изображение  $f$  будет соответствовать имеющемуся знаковому представлению, причем найдутся такие индексы  $i, j$ , что для несмежных классов эквивалентности  $v_i$  и  $v_j$  выполняться  $f(v_i) = f(v_j)$ .

Для того, чтобы перечислить все варианты, надо видоизменить процедуру формирования ациклических транзитивных графов, рассмотренную в доказательстве утверждения 1. В этом случае последовательность ациклических транзитивных графов  $G^{(k)} = (V^{(k)}, E^{(k)})$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , строится следующим образом.

Положим  $G^{(1)} = (\bar{G}_\tau^\theta)^{Tr}$ . Пусть  $G^{(k)} = (V^{(k)}, E^{(k)})$  – порожденный ациклический транзитивный граф на шаге  $k$ , и  $G^{(k)}$  не является графом отношения строгого порядка. Тогда существует пара вершин  $(v_i, v_j) \in V^{(k)} \times V^{(k)}$ , что  $(v_i, v_j) \notin E^{(k)}$  и  $(v_j, v_i) \notin E^{(k)}$ . Далее строим граф  $G^{(k+1)}$  либо как в утверждении 1, т.е.  $G^{(k+1)} = (V^{(k)}, (E^{(k)} \cup \{(v_i, v_j)\})^{Tr})$ , либо путем слияния вершин  $v_i$  и  $v_j$  в одну вершину  $v_i \cup v_j$ , в результате чего получим граф  $(V^{(k+1)}, E^*)$ , где  $V^{(k+1)} = (V^{(k)} \cup \{v_i \cup v_j\}) \setminus (\{v_i\} \cup \{v_j\})$ ,

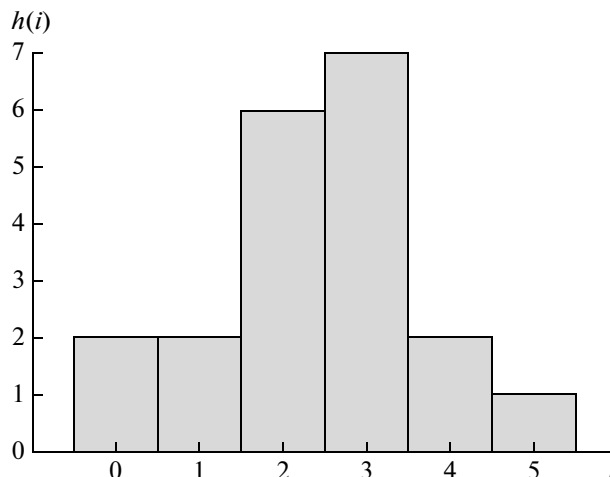


Рис. 2. Гистограмма модельного изображения, представленного на рис. 1

$$\begin{aligned}
 E^* = & \left\{ (v_l, v_m) \in E^{(k)} \mid v_l \notin \{v_i, v_j\}, v_m \notin \{v_i, v_j\} \right\} \cup \\
 & \cup \left\{ (v_i \cup v_j, v_m) \mid (v_i, v_m) \in E^{(k)} \right\} \cup \\
 & \cup \left\{ (v_i \cup v_j, v_m) \mid (v_j, v_m) \in E^{(k)} \right\} \cup \\
 & \cup \left\{ (v_m, v_i \cup v_j) \mid (v_m, v_i) \in E^{(k)} \right\} \cup \\
 & \cup \left\{ (v_m, v_i \cup v_j) \mid (v_m, v_j) \in E^{(k)} \right\};
 \end{aligned}$$

а после операции его транзитивного замыкания приходим к искомому графу  $G^{(k+1)} = (V^{(k+1)}, (E^*)^{Tr})$ .

Используя тот же способ, как и в утверждении 1, можно показать, что на каждом шаге будет получаться ациклический транзитивный граф  $G^{(k)}$  и процедура построения графов непременно завершится на некотором графе  $G^{(n)}$  отношения строгого порядка. Нетрудно заметить, что данная процедура, позволяет перечислить все возможные изображения, соответствующие заданному знаковому представлению.

**2. Аксиоматическое введение меры информативности изображений.** Поскольку одному знаковому представлению отвечает некоторое множество изображений, возникает задача выбора из этого множества такого изображения, которое бы сохраняло контурную информацию, содержащуюся в знаковом представлении, и в то же время выступало наиболее “типичным” представителем, т.е. не несло бы избыточной информации о градациях яркости пикселей. Для этого проанализируем, как можно измерить количество данной информации для изображений.

Меру информативности изображений будем строить в рамках аксиоматического подхода, согласно которому требуется определить некоторое конечное число аксиом (желательных свойств меры информативности), которые бы однозначно ее определяли. С учетом того, что мы не предполагаем в мере информативности учитывать взаимное расположение пикселей (исследуется только информация, связанная с градациями яркости), в качестве изображения рассмотрим произвольную функцию  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$ , отображающую конечное множество пикселей  $\Omega$  в множество целых неотрицательных чисел. Необходимо отметить, что вводимые далее аксиомы не в полной мере отражают свойства знакового представления изображений. Мера информативности, учитывающая свойства знакового представления, вводится и исследуется в следующем разделе.

**А к с и о м а 1.** Мера информативности – это функционал  $U : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty)$ .

Будем считать, что значение яркости само по себе не несет никакой информации, а информация передается изображением за счет перепадов яркости. Таким образом, информативность однотонного изображения, яркость которого в каждой точке постоянна, равна нулю.

**А к с и о м а 2.** Пусть  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$  и множество значений  $f(\Omega) = \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \Omega\}$  функции  $f$  является однопиксельным, т.е.  $|f(\Omega)| = 1$ . Тогда  $U(f) = 0$ .

Далее сформулируем аксиомы, позволяющие определить такие классы преобразований изображений, которые не изменяют их информативность. Поскольку в мере информативности учитываются только градации яркости, то преобразование, связанное с “перемешиванием” пикселей на изображении, не влияет на информативность.

**Аксиома 3.** Пусть  $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{Z}_+$  и  $\psi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  – биекция. Тогда  $U(\psi \circ f) = U(f)$ .

Преобразование, связанное с присвоением новых значений яркости пикселям при помощи биективных отображений, также не влияет на информацию о градациях яркости, поскольку важен сам факт различия градаций яркости, а не их конкретные значения. С учетом этого введем в рассмотрение следующую аксиому.

**Аксиома 4.** Пусть  $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{Z}_+$  и  $\phi : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$  – биекция. Тогда  $U(f \circ \phi) = U(f)$ .

Пусть  $h_f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$  – гистограмма изображения  $f$ , значение  $h_f(i)$  которой дает число пикселей на изображении с яркостью  $i$  (см. рис. 2). Очевидно, что данная функция не равна нулю только на некотором конечном множестве целых чисел. Из аксиом 3, 4 можно вывести следующее важное средство.

**Следствие 1.** Пусть изображения заданы функциями  $f : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{Z}_+$  и  $g : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{Z}_+$ . Тогда  $U(f) = U(g)$ , если существует такая биекция  $\phi : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ , что  $h_g(i) = h_f(\phi(i))$  для любого  $i \in \mathbb{Z}_+$ .

**Доказательство.** Поскольку  $h_g(i) = h_f(\phi(i))$  для любого  $i \in \mathbb{Z}_+$ , то можно построить биекцию  $\psi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  между множествами  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , удовлетворяющую следующему условию: если  $f(\mathbf{x}) = i$ , то  $g(\psi(\mathbf{x})) = \phi(i)$ . Поэтому изображение  $g$  допускает представление в виде  $g = \psi \circ f \circ \phi$ . Применяя последовательно аксиомы 2 и 3, получим, что  $U(g) = U(\psi \circ f \circ \phi) = U(f \circ \phi) = U(f)$ .

Отметим, что доказанное следствие позволяет несколько упростить задачу, так как достаточно определить значение функционала  $U$  на всех возможных последовательностях вида  $(h_f(0), h_f(1), \dots)$ .

Далее будем рассматривать также функционал  $\bar{U}(f) = U(f)/|\Omega|$ , показывающий среднее значение информативности пикселя для изображения  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$ . Предположим, что изображение  $g$  состоит из  $k$  копий изображения  $f$ , в этом случае  $h_g(i) = k h_f(i)$  для любого  $i \in \mathbb{Z}_+$ . Последнее условие можно выразить через частоты появления пикселей на изображениях  $f$  и  $g$

$$p_g(i) = \frac{h_g(i)}{\sum_{j \in \mathbb{Z}_+} h_g(j)},$$

$$p_f(i) = \frac{h_f(i)}{\sum_{j \in \mathbb{Z}_+} h_f(j)}$$

в виде  $p_g(i) = p_f(i)$  для любого  $i \in \mathbb{Z}_+$ . Естественно предположить, что  $\bar{U}(f) = \bar{U}(g)$  для таких изображений. Учитывая аксиому 2, сформулируем следующую аксиому.

**Аксиома 5.** Пусть  $f, g \in \mathcal{F}$  и  $p_g(i) = p_f(i)$  для всех  $i \in \mathbb{Z}_+$ . Тогда  $\bar{U}(f) = \bar{U}(g)$ .

Пусть  $\phi : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$  – произвольное отображение (не обязательно инъективное), а  $f \circ \phi$  – изображение, полученное в результате действия преобразования  $\phi$  на изображение  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$ . Если  $\phi$  не является инъекцией, то мы потеряем часть информации о градациях яркости в первоначальном изображении  $f$ , а именно в этом случае множества  $\phi^{-1}(b) = \{a \in \phi(\Omega) \mid \phi(a) = b\}$  для  $b \in \phi(f(\Omega))$  необязательно будут одноэлементными. Это означает, что исходное изображение “огрубляется” за счет присвоения “близким по яркости” пикселям одного значения. Отметим, что данное преобразование является распространенным при обработке изображений, когда необходимо сократить число градаций яркости, оставляя наиболее характерные срезы функции изображения.

Будем полагать, что  $\phi(f(\Omega)) = \{b_1, \dots, b_n\}$ , тогда множества  $\Omega_k = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \phi(f(\mathbf{x})) = b_k\}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , очевидно, задают разбиение множества  $\Omega$ . Если отображение  $\phi$  инъективно, то изображения  $f_k : \Omega_k \rightarrow \mathbb{Z}_+$ , являющиеся сужениями функции  $f$  на множества  $\Omega_k$ , будут иметь нулевую информативность согласно аксиоме 2, так

как  $|f_k(\Omega_k)| = 1$ . Когда же отображение  $\phi$  не является инъективным,  $|f_k(\Omega_k)| \neq 1$ . Поэтому значение  $\sum_{k=1}^n U(f_k)$

будет характеризовать суммарные потери информации при отображении  $\phi$ . Таким образом, предполагая такой аддитивный характер накопления неопределенности, можно ввести следующую аксиому аддитивности.

**Аксиома 6.** Пусть  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$ ,  $\phi : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ , и  $\phi(f(\Omega)) = \{b_1, \dots, b_n\}$ . Рассмотрим множества  $\Omega_k = \{x \in \Omega | \phi(f(x)) = b_k\}$ , а также сужения  $f_k : \Omega_k \rightarrow \mathbb{Z}_+$  функции  $f$  на множестве  $\Omega_k$ . Тогда  $\sum_{k=1}^n U(f_k) + U(f \circ \phi) = U(f)$ .

Выразим приведенные выше аксиомы через введенный функционал  $\bar{U}$ . С учетом аксиомы 5 нам достаточно определить данный функционал для последовательности чисел  $P = (p(i))_{i \in \mathbb{Z}_+}$ , таких, что  $p(i) \geq 0$  и  $\sum_{i \in \mathbb{Z}_+} p(i) = 1$ . Отметим, что значение  $p(i)$  можно интерпретировать как вероятность появления на изображении пикселя с яркостью  $i$ , следовательно,  $P$  можно рассматривать в качестве вероятностной меры. Тогда можно определить вероятность  $P(A)$  любого подмножества  $A \subseteq \mathbb{Z}_+$  выражением

$$P(A) = \sum_{i \in A} p(i).$$

Далее будем использовать стандартные обозначения из теории вероятностей, в частности, пусть  $\phi : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$ , тогда  $P^\phi$  – вероятностная мера, задаваемая равенством  $P^\phi(A) = P\{i \in \mathbb{Z}_+ | \phi(i) \in A\}$ . Отметим, что в рамках поставленной задачи не требуется рассматривать все возможные вероятностные меры. Согласно построению, все  $p(i)$  представляют собой рациональные числа, и лишь конечное подмножество этих чисел отлично от нуля. Множество всех таких вероятностных мер на алгебре подмножеств  $\mathbb{Z}_+$  обозначим через  $M_{pr}$ .

**Следствие 2.** Функционал  $\bar{U}$  на  $M_{pr}$  обладает следующими свойствами:

1)  $\bar{U}(P) \geq 0$  для всех  $P \in M_{pr}$ .

2)  $\bar{U}(P) = 0$ , если существует  $i \in \mathbb{Z}_+$ , что  $P(i) = 1$ .

3) Предположим, что отображение  $\phi : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$  инъективно. В этом случае  $\bar{U}(P^\phi) = \bar{U}(P)$  для всех  $P \in M_{pr}$ .

4) Пусть  $P \in M_{pr}$ ,  $\phi : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$  и  $A = \{i \in \mathbb{Z}_+ | p(i) > 0\}$ . Рассмотрим разбиение множества  $A$  на подмножества, представляющие прообразы элементов множества  $B = \{b_1, \dots, b_n\} = \phi(A)$ , т.е. разбиение состоит из множеств  $A_k = \{i \in A | \phi(i) = b_k\}$ . Тогда

$$\bar{U}(P) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \bar{U}(P_{A_k}) + \bar{U}(P^\phi),$$

где условные вероятностные меры  $P_{A_k}$  задаются с помощью выражения  $P_{A_k}(C) = P(C \cap A_k) / P(A_k)$ ,  $C \subseteq \Omega$ .

**Доказательство.** Свойства 1)–3) непосредственно следуют из аксиом 1–4. Покажем, что свойство 4) следует из аксиомы 6. Пусть  $P \in M_{pr}$  и используются обозначения следствия 2. Выберем функцию  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$  таким образом, чтобы  $p(i) = h_f(i) / N$ , где  $h_f(A) = |\Omega|$ . Запишем теперь равенство из аксиомы 6 с помощью функционала  $\bar{U}$

$$\sum_{k=1}^n h_f(A_k) \bar{U}(f_k) + h_f(A) \bar{U}(f \circ \phi) = h_f(A) \bar{U}(f),$$

где  $h_f(A) = \sum_{i \in A_k} h_f(i)$ . Заметим, что  $P(A_k) = h_f(A_k) / h_f(A)$  и изображениям  $f_k, f \circ \phi$  соответствуют вероятностные меры  $P_{A_k}, P^\phi$ . Таким образом, приходим к выводу, что свойство 4) также истинно.

Свойства, перечисленные в следствии 2, являются хорошо известными свойствами энтропии Шеннона. Так, например, свойство 2) аккумулирует в себе свойства симметричности и продолжения. Свойство 4) – это свойство аддитивности, которое формулируется следующим образом. Пусть  $\xi$  – случайная величина со значениями в  $\mathbb{Z}_+$  и  $\eta = \phi(\xi)$ . Тогда для энтропии Шеннона  $S$  выполняется  $S(\xi, \eta) = S(\xi) = S(\xi|\eta) + S(\eta)$ . В данном случае  $S(\xi|\eta) = S(\xi)$ , так как значения  $\eta$  полностью зависят от значений  $\xi$ .

Нетрудно показать, что свойства 2) и 3) могут быть получены из свойств 1) и 4). Действительно, если в свойстве 4) в качестве  $\phi$  выберем биекцию  $\phi(i) = i$  для всех  $i \in \mathbb{Z}_+$ , то  $\bar{U}(P) = \bar{U}(P^\phi)$ , т.е.

$$\sum_{k=1}^n P(A_k) \bar{U}(P_{A_k}) = 0.$$

Последнее равенство возможно согласно свойству 1) только в том случае, если  $\bar{U}(P_{A_k}) = 0$  для всех  $k$ . Поэтому остается заметить, что в данном случае вероятностные меры  $P_{A_k}$  – это меры Дирака, т.е. такие, как в свойстве 2). Таким образом, свойство 2) следует из свойств 1) и 4).

Пусть теперь отображение  $\phi: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$  инъективно, тогда, применяя формулу из свойства 4), убеждаемся, что

$$\sum_{k=1}^n P(A_k) \bar{U}(P_{A_k}) = 0,$$

поскольку все вероятностные меры  $P_{A_k}$  являются мерами Дирака, т.е. свойство 3) также следует из свойств 1) и 4).

**Утверждение 2.** Пусть функционал  $\bar{U}$  на  $M_{pr}$  удовлетворяет свойствам, перечисленным в следствии 2. Тогда  $\bar{U}$  – энтропия Шеннона, т.е.

$$\bar{U}(P) = -c \sum_{i \in A} p(i) \ln p(i), \tag{2.1}$$

где  $P \in M_{pr}$ ,  $A = \{i \in \mathbb{Z}_+ | p(i) > 0\}$  и  $c \geq 0$ .

**Доказательство.** Обычно, когда числа  $p(i)$  вещественные, доказывается единственность энтропии Шеннона доказывается при помощи аксиомы непрерывности. В предлагаемом доказательстве аксиома непрерывности не требуется. Вначале выясним, какими будут значения функционала  $\bar{U}$  на вероятностных мерах  $P_n$ , для которых  $p_n(i) = 1/n$ , если  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $p_n(i) = 0$  в противном случае. Введем функцию  $u(n) = \bar{U}(P_n)$ . Пусть  $\{A_1, \dots, A_m\}$  – разбиение множества  $\{1, \dots, km\}$ , где  $k, m$  – натуральные числа, обладающие свойством:  $|A_i| = k$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Рассмотрим отображение  $\phi(1, \dots, km) \rightarrow \{1, \dots, m\}$ , такое, что  $\phi(i) = j$ , если  $i \in A_j$ . Применяя формулу из свойства 4) следствия 2 к вероятностной мере  $P_{km}$ , получим, что

$$\bar{U}(P_{km}) = \sum_{i=1}^m P_{km}(A_i) \bar{U}(P_{A_i}) + \bar{U}(P_m).$$

Видно, что  $P_{km}(A_i) = 1/m$ ,  $\bar{U}(P_{A_i}) = \bar{U}(P_k)$ , следовательно,  $\bar{U}(P_{km}) = \bar{U}(P_k) + \bar{U}(P_m)$  или  $u(km) = u(k) + u(m)$ . Из теории функциональных уравнений [14] известно, что если функция  $u: \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty)$  обладает свойствами  $u(1) = 0$  и  $u(km) = u(k) + u(m)$  для любых  $k, m \in \mathbb{N}$ , то ее можно представить в виде  $u(n) = c \ln n$ , где  $c \geq 0$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Поэтому  $\bar{U}(P_n) = c \ln n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Далее, рассмотрим вероятностную меру  $P \in M_{pr}$ , для которой  $p(i) = k_i/N$ , где  $k_i \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $\sum_{i=1}^m k_i = N$ . Пусть  $P_N$  – вероятностная мера, а разбиение  $\{A_1, \dots, A_m\}$  множества  $\{1, \dots, N\}$  такое, что  $|A_i| = k_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Будем считать, что отображение  $\phi: \{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$  задано с помощью  $\phi(i) = j$ , если  $i \in A_j$ . Тогда, воспользовавшись формулой из свойства 4) следствия 2 для вероятностной меры  $P_N$ , имеем

$$\bar{U}(P_N) = \sum_{i=1}^m P_N(A_i) \bar{U}(P_{A_i}) + \bar{U}(P).$$

Заметим, что в последнем выражении  $\bar{U}(P_N) = c \ln N$ ,  $P_N(A_i) = k_i/N$ ,  $\bar{U}(P_{A_i}) = c \ln k_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Поэтому



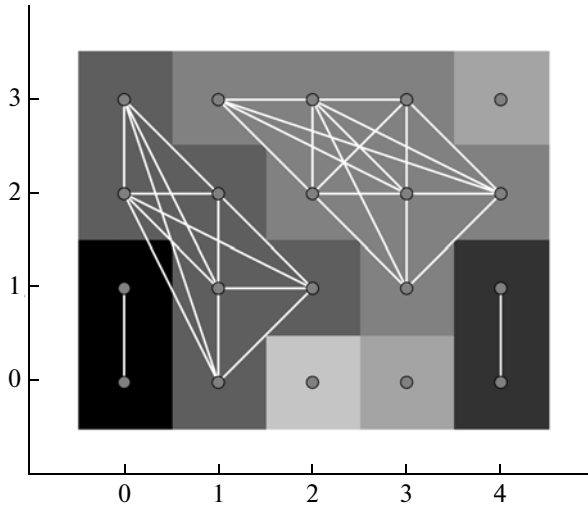


Рис. 3. Граф отношения эквивалентности  $\theta$  модельного изображения. Классы эквивалентности  $v_i$  соответствуют компонентам связного графа

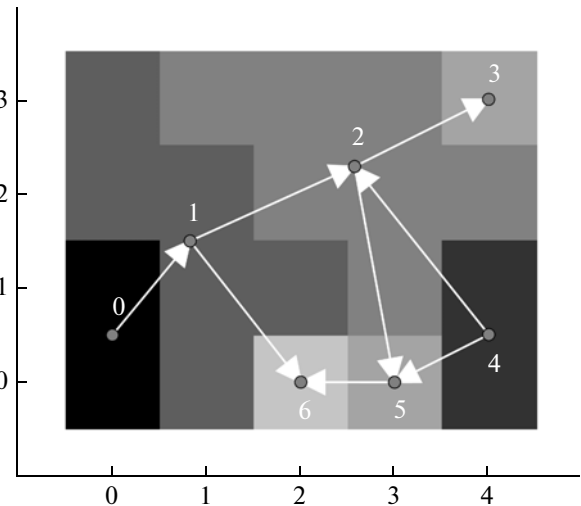


Рис. 4. Граф продолжения отношения  $\tau$  на классы эквивалентности модельного изображения

$$\begin{aligned} \bar{U}(P) &= c \ln N - c \sum_{i=1}^m p(i) \ln k_i = c \sum_{i=1}^m p(i) \ln N - \\ &- c \sum_{i=1}^m p(i) \ln k_i = -c \sum_{i \in A} p(i) \ln p(i). \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

Можно условно считать, что  $p(i) \ln p(i) = 0$ , если  $p(i) = 0$ . Тогда выражение для информативности примет вид

$$\bar{U}(P) = -c \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} p(i) \ln p(i).$$

Ясно, что для произвольного изображения  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$  мера информативности

$$U(f) = -cN \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} p_f(i) \ln p_f(i),$$

где  $N = |\Omega|$  и  $p_f(i) = h_f(i)/N$ . Мера информативности определяется единственным образом условием нормировки. Например, если считать, что самое информативное изображение, состоящее из  $n$  пикселей, имеет значение информативности, равное 1, то  $c = 1/(n \ln n)$ .

Отметим следующую вероятностную интерпретацию средней информативности  $\bar{U}(f)$  пикселя для изображения  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$ . Пусть  $P$  – вероятностная мера на алгебре всех подмножеств  $\Omega$ , задаваемая равенством  $P(A) = |A|/|\Omega|$ . Тогда отображение  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}_+$  рассмотрим в качестве случайной величины и, очевидно, средняя информативность изображения представляет собой энтропию Шеннона:  $\bar{U}(f) = S(f)$ . Далее введем векторную случайную величину  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ , где  $N = |\Omega|$ , и случайные величины независимы и одинаково распределены, как и случайная величина  $f$ . Тогда

$$S(\xi) = \sum_{i=1}^N S(\xi_i) = N\bar{U}(f) = U(f).$$

Отметим также, что энтропия широко используется для оценки информативности изображения в теории кодирования [15], при этом для определения энтропии рассматриваются вероятности появления изображения с фиксированными значениями яркости в каждом пикселе. Оценка или моделирование таких вероятностей представляет собой весьма сложную задачу, в результате чего для вычисления энтропии, как правило, переходят к анализу условных вероятностей и делают предположение о том, что изображение представляет собой марковский процесс не более чем  $k$ -го порядка, таким образом упрощая

процедуру оценки условных вероятностей. В предлагаемом подходе учитываются вероятности появления не целого изображения, а отдельно взятого пикселя, и на основе введенных аксиом доказывается, что полученная в результате мера информативности обладает свойствами энтропии Шеннона.

**3. Меры информативности и неопределенности знакового представления.** Обсудим теперь, как можно измерить неопределенность информации о градациях яркости изображения, если нам известно только его знаковое представление. Будем описывать знаковое представление с помощью отношения квази-порядка на  $\Omega$ , т.е. рефлексивного и транзитивного отношения. Граф данного отношения получается как транзитивное замыкание графа  $\bar{G}_\tau$ . В дальнейшем мы не будем учитывать способ порождения данного отношения. Для нас важно лишь то, что знаковому представлению  $\tau$  соответствует класс изображений  $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}$ . Таким образом, необходимо построить функционал на множестве отношений квази-порядка, измеряющий количественно неопределенность описания изображения с помощью знакового представления. Данный функционал обозначим через  $\hat{U}$ , а множество всех квази-порядков на множестве  $\Omega$  через  $\mathcal{T}$ .

Как и ранее, данный функционал будем определять через набор его желательных свойств, при этом, однако, функционал  $\hat{U}$  должен некоторым образом взаимодействовать с функционалом  $\bar{U}$  на  $\mathcal{F}$ , определяющим информативность изображений. Отметим, что каждое знаковое представление также имеет некоторую информативность, которую будем измерять с помощью функционала, также обозначаемого через  $U$ . Взаимодействие данных функционалов устанавливает следующая аксиома.

**Аксиома 7.** Пусть  $\tau \in \mathcal{T}$ ,  $U_{\max}(\tau) = \sup\{U(f) | f \in \mathcal{F}_\tau\}$ , тогда

$$U(\tau) + \hat{U}(\tau) = U_{\max}(\tau). \quad (3.1)$$

Отметим, что аксиома 7 выражает известный принцип в теории информации, предложенный Д. Клиром [16], согласно которому информативность и неопределенность связаны между собой и в сумме представляют некоторую постоянную величину. При этом правая часть формулы (3.1) соответствует информативности наиболее информативного изображения со знаковым представлением  $\tau$ . Поэтому из формулы (3.1) выводим, что  $\hat{U}(\tau) = U_{\max}(\tau) - U(\tau)$ . Таким образом, количество неопределенности знакового представления  $\tau$  изображения  $f$  равно разности информативности изображения и информативности его знакового представления, причем изображение  $f$  выбирается из принципа максимума неопределенности.

Будем считать изображения  $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$  эквивалентными, если существует монотонно возрастающая биекция  $\varphi : f_1(\Omega) \rightarrow f_2(\Omega)$ , такая, что  $f_2 = \varphi \circ f_1$ . Предположим, что эквивалентные изображения содержат одну и ту же информацию. Тогда должна выполняться следующая аксиома.

**Аксиома 8.**  $\hat{U}(\tau) = 0$ , если отношение  $\tau \in \mathcal{T}$  является связным, т.е. любые два элемента  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$  сравнимы между собой.

Если отношение  $\tau \in \mathcal{T}$  связно, то класс  $f \in \mathcal{F}_\tau$  состоит из эквивалентных между собой изображений, а, согласно предположению, эквивалентные изображения содержат одну и ту же информацию. Поэтому в данном случае знаковое представление  $\tau$  сохраняет всю необходимую информацию об изображении. Следовательно, можно считать, что  $\hat{U}(\tau) = 0$ . При этом  $U(\tau) = U_{\max}(\tau)$  согласно аксиоме 7.

**Аксиома 9.** Пусть  $\tau_1 \subseteq \tau_2$  для  $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$ , тогда  $\hat{U}(\tau_1) \geq \hat{U}(\tau_2)$ .

В случае  $\tau_1 \subseteq \tau_2$  мы имеем больше информации, описывая изображение с помощью знакового представления  $\tau_2$ , по сравнению со знаковым представлением  $\tau_1$ . Следовательно, аксиома 9 должна выполняться.

**Аксиома 10.** Пусть  $G_\tau = (\Omega, \tau)$  – граф знакового представления,  $\tau \in \mathcal{T}$ , и множества  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$  определяют компоненты связности графа  $G_\tau$ . Тогда  $\sum_{k=1}^m U(\tau_{\Omega_k}) = U(\tau)$ , где  $\tau_{\Omega_k} = \tau \cap \Omega_k \times \Omega_k$  – сужение отношения  $\tau$  на множество  $\Omega_k, k = 1, \dots, m$ .

Смысл аксиомы 10 заключается в том, что компоненты связности графа  $G_\tau$  есть фрагменты независимой информации, поэтому информативность всего представления должна быть равной сумме информативностей данных независимых компонент.

Дальнейшая задача предполагает теоретическое исследование свойств функционалов  $U, \hat{U}, U_{\max}$  на  $\mathcal{T}$  и рассмотрение способов определения  $U$  и  $\hat{U}$ . Пусть  $\tau \in \mathcal{T}$ , тогда отношение  $\theta = \tau \cap \tau^{-1}$  является отношением эквивалентности. На рис. 3 представлен граф отношения эквивалентности  $\theta$  для модельного

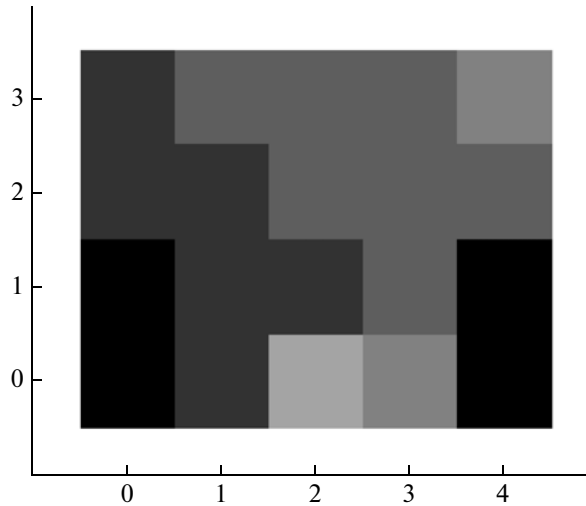


Рис. 5. Пример восстановленного изображения по знаковому представлению модельного изображения (рис. 1)

изображения. Пусть  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  – множество всех классов эквивалентности, определяемых отношением  $\theta$  на  $\Omega$ , а  $\tau^\theta$  – продолжение отношения  $\tau$  на классы эквивалентности. Будем считать, что  $(v_i, v_j) \in \tau^\theta$ , если существует пара  $(\omega_i, \omega_k) \in \tau$ , такая, что  $\omega_i \in v_i$  и  $\omega_k \in v_j$ . Граф отношения  $\tau^\theta$  для модельного изображения представлен на рис. 4. Известно, что получаемое таким образом отношение  $\tau^\theta$  на  $V$  является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным отношением, т.е. отношением частичного порядка, причем всегда можно построить отношение нестрогого линейного порядка  $\rho$  так, что  $\rho \supseteq \tau^\theta$ . Тогда отношению  $\rho$  будет соответствовать класс изображений, в котором все  $v_i$  имеют различные градации яркости. Отсюда следует утверждение.

**У т в е р ж д е н и е 3.** Пусть  $\tau \in \mathcal{T}$ ,  $\theta = \tau \cap \tau^{-1}$  и  $\tau^\theta$  – продолжение отношения  $\tau$  на множество  $V$  классов эквивалентности, порожденных  $\theta$ , тогда

$$U_{\max}(\tau) = -cN \sum_{i=1}^n p(i) \ln p(i), \quad (3.2)$$

где  $p(i) = |v_i|/N$ , и  $N = |\Omega|$ .

Из определения 1 следует, что любое отношение квазипорядка является знаковым представлением некоторого изображения, в частности, отношение квазипорядка  $\tau = \tau \cap \tau^{-1} = \theta$ . Из утверждения 3 вытекает следствие 3.

**С л е д с т в и е 3.** Пусть  $\theta = \tau$ , т.е.  $\tau$  – отношение эквивалентности. Тогда

$$\hat{U}(\tau) = -cN \sum_{i=1}^n p(i) \ln p(i),$$

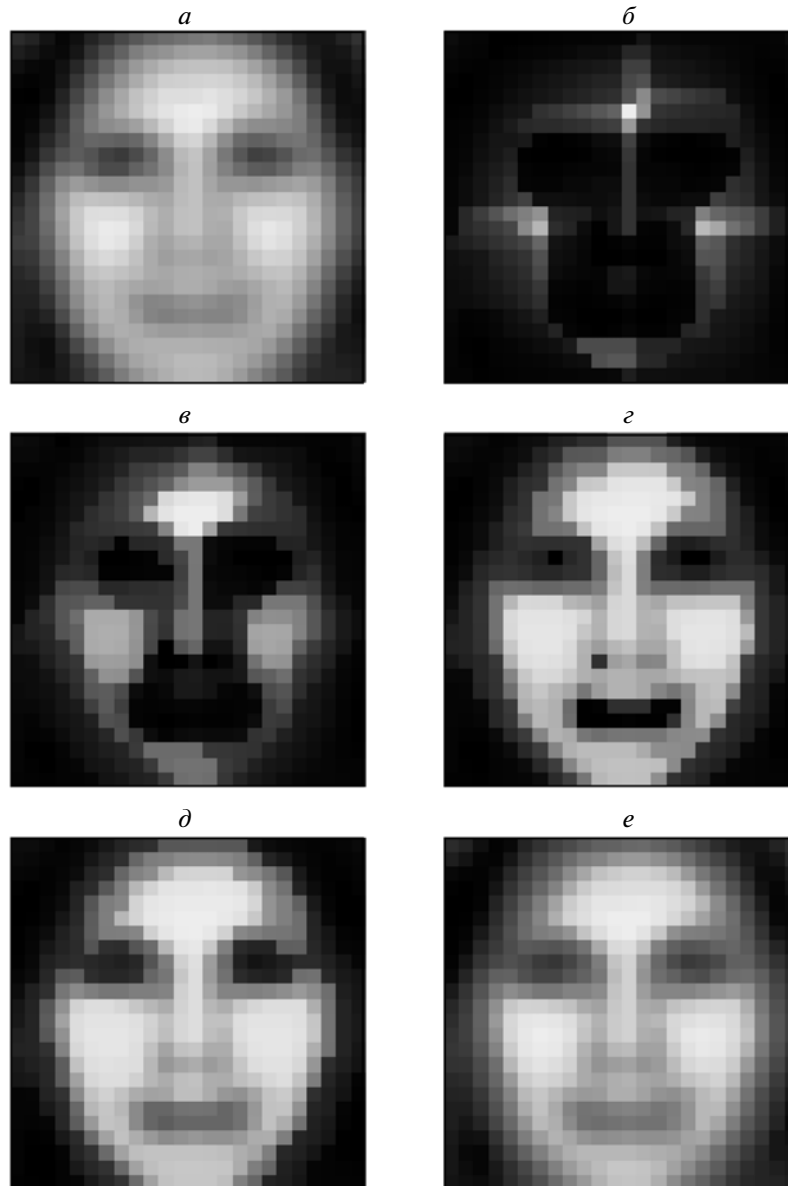
где  $p(i) = |v_i|/N$  и  $N = |\Omega|$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В этом случае компонентами связности графа  $G_\tau$  будут множества  $v_1, \dots, v_n$  и  $\sum_{k=1}^n U(\tau_{v_k}) = U(\tau)$  в силу аксиомы 9. Так как  $\tau_{v_k}$  – связные отношения,  $U(\tau_{v_k}) = 0$ , т.е.  $U(\tau) = 0$  и  $\hat{U}(\tau) = U_{\max}(\tau)$ . Отсюда следует требуемое доказательство.

**С л е д с т в и е 4.** Пусть  $G_\tau$  – граф отношения  $\tau \in \mathcal{T}$  и его компоненты связности определяются множествами  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$ , причем  $\tau_{\Omega_i}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , – связные отношения. Тогда

$$\hat{U}(\tau) = -cN \sum_{i=1}^m p(i) \ln p(i),$$

где  $p(i) = |\Omega_i|/N$  и  $N = |\Omega|$ .



**Рис. 6.** Пример восстановления изображения  $f$  по оконным знаковым представлениям  $\tau_f(\varepsilon)$ :  $a$  – оригинальное изображение; изображения, восстановленные по оконным знаковым представлениям  $\tau_f(\varepsilon)$  с различным параметром окрестности  $\varepsilon$  ( $b - \varepsilon = 1$ ,  $v - \varepsilon = 2$ ,  $z - \varepsilon = 4$ ,  $d - \varepsilon = 6$ );  $e$  – изображение, восстановленное по полному знаковому представлению

**Доказательство.** Согласно определению  $U_{\max}(\tau)$ , существует  $f \in \mathcal{F}_\tau$  такое, что  $U_{\max}(\tau) = U(f)$ . Поскольку каждое отношение  $\tau_{\Omega_i}$  является связным, то любые две функции в классе  $\mathcal{F}_{\tau_{\Omega_i}}$  эквивалентны. Это означает, что  $U_{\max}(\tau_{\Omega_i}) = U_{\max}(f_i)$ , где  $f_i$  – сужения функции  $f$  на множества  $\Omega_i$ . Таким образом, в силу аксиом 7–10 имеем

$$U(\tau) = \sum_{i=1}^m U(\tau_{\Omega_i}) = \sum_{i=1}^m U(f_i) \text{ и}$$

$$\hat{U}(\tau) = U_{\max}(\tau) - U(\tau) = U(f) - \sum_{i=1}^m U(f_i).$$

Результаты оценки введенных мер информативности и неопределенности на примере изображения лица,  $c = (NM)^{-1}$

$\varepsilon$	$U(f)$	$U_{\max}(\tau_f)$	$\hat{U}_{up}(\tau_f)$
1	4.683	6.264	5.230
2	4.683	6.151	4.232
4	4.683	5.919	2.988
6	4.683	5.662	2.184
$\infty$	4.683	4.683	0.0

Легко проверить, что разбиение  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  более мелкое, чем разбиение  $\{\Omega_1, \dots, \Omega_m\}$ , т.е. каждое множество  $\Omega_k$  может быть представлено в виде объединения множеств  $v_i$ . Поэтому можно выбрать отображение  $\phi: f(\Omega) \rightarrow \{1, \dots, m\}$  таким образом, что  $\Omega_k = \{\omega \in \Omega | \phi(f(\omega)) = k\}$ . Это будет выполняться, если  $\phi(f(v_i)) = k$  при  $v_i \subseteq \Omega_k$ . Тогда в силу аксиомы 6 (аддитивность меры информативности) для меры информативности  $U$  на  $\mathcal{F}$  получим

$$\hat{U}(\tau) = U(f) - \sum_{i=1}^m U(f_i) = U(\phi \circ f).$$

Отметим, что отображение  $\phi \circ f$  определяется равенством  $\phi(f(\omega)) = k$ , если  $\omega \in \Omega_k$ , и расчет его информативности выполняется по формуле

$$U(\phi \circ f) = -cN \sum_{i=1}^m p(i) \ln p(i),$$

где  $p(i) = |\Omega_i|/N$  и  $N = |\Omega|$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Результат, сформулированный в следствии 3, может быть представлен в более простой форме. Нетрудно показать, что, если выполняется условие следствия 4, то отношение  $\tau \cup \tau^{-1}$  является отношением эквивалентности, с которым связано разбиение  $\{\Omega_1, \dots, \Omega_m\}$ , и  $\hat{U}(\tau \cup \tau^{-1}) = \hat{U}(\tau)$  согласно следствию 3.

**У т в е р ж д е н и е 4.** Пусть  $\tau \in \mathcal{T}$  и  $\alpha \subseteq \tau \cup \tau^{-1}$  — отношение эквивалентности. Тогда  $\hat{U}(\tau) \leq \hat{U}(\alpha)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $\tau_1 = \alpha \cap \tau$ . Видно, что это рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение, т.е.  $\tau_1 \in \mathcal{T}$ . Далее напомним, что  $\tau_1 \cup \tau_1^{-1} = (\alpha \cap \tau) \cup (\alpha \cap \tau)^{-1} = \alpha \cap (\tau \cup \tau^{-1}) = \alpha$ . Поэтому, учитывая замечание 2, имеем  $\hat{U}(\tau_1) = \hat{U}(\alpha)$ . Поскольку  $\tau_1 \subseteq \tau$  и в силу аксиомы 9 выполняется  $\hat{U}(\tau) \leq \hat{U}(\tau_1)$ , то  $\hat{U}(\tau) \leq \hat{U}(\alpha)$ .

Утверждение 4 позволяет ввести верхнюю оценку  $\hat{U}_{up}$  для меры неопределенности  $\hat{U}$ . Пусть  $Eq(\tau \cup \tau^{-1})$  — множество всех отношений эквивалентности, которые включаются в отношение  $\tau \cup \tau^{-1}$ . Тогда функционал  $\hat{U}_{up}$  определим следующим образом:

$$\hat{U}_{up}(\tau) = \min \{ \hat{U}(\alpha) | \alpha \in Eq(\tau \cup \tau^{-1}) \}.$$

В силу утверждения 4  $\hat{U}(\tau) \leq \hat{U}_{up}(\tau)$  для всех  $\tau \in \mathcal{T}$ .

**У т в е р ж д е н и е 5.** Функционал  $\hat{U}_{up}$ , как мера неопределенности знакового представления, и функционал  $U = U_{\max} - \hat{U}_{up}$ , как мера информативности знакового представления, на множестве знаковых представлений  $\mathcal{T}$  удовлетворяют аксиомам 7–10.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Необходимо показать, что выполняются аксиомы 7–10. Пусть  $\tau \in \mathcal{T}$  и  $\hat{U}_{up}(\tau) = \hat{U}(\alpha)$ . Ясно, что  $\hat{U}_{\max}(\tau) = \hat{U}(\tau \cap \tau^{-1})$  и  $\tau \cap \tau^{-1} \in Eq(\tau \cup \tau^{-1})$ . Поэтому  $U_{\max}(\tau) \geq \hat{U}_{up}(\tau)$ , а значит, можно определить информативность знакового представления с помощью  $U(\tau) = U_{\max}(\tau) - \hat{U}_{up}(\tau)$ , т.е. аксиома 7 выполняется. Аксиома 8 также справедлива, так как  $\tau \cup \tau^{-1}$  есть отношение эквивалентности, определяющее

тривиальное разбиение  $\{\Omega\}$ , и, очевидно,  $\hat{U}_{up}(\tau) = \hat{U}(\tau \cup \tau^{-1}) = 0$ . Аксиома 9 имеет место в силу того, что  $Eq(\tau_1 \cup \tau_1^{-1}) \subseteq Eq(\tau_2 \cup \tau_2^{-1})$ , если  $\tau_1 \subseteq \tau_2$  и  $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$ .

Докажем выполнение аксиомы 10. Пусть  $G_\tau = (\Omega, \tau)$  – граф знакового представления  $\tau \in \mathcal{T}$  и множества  $\Omega_1, \dots, \Omega_m$  определяют компоненты связности графа  $G_\tau$ . Предположим, что  $\hat{U}_{up}(\tau) = \hat{U}(\alpha)$ . Так как оптимизационная задача нахождения  $\alpha$  в этом случае распадается на  $m$  независимых оптимизационных задач для каждого множества  $\Omega_i$ , можно считать, что  $\hat{U}_{up}(\tau_{\Omega_i}) = \hat{U}(\alpha_{\Omega_i}) = U_{\max}(\alpha_{\Omega_i})$ . С учетом этого,  $U(\tau_{\Omega_i}) = U_{\max}(\tau_{\Omega_i}) - U_{\max}(\alpha_{\Omega_i})$ ,  $i = 1, \dots, m$ , и  $U(\tau) = U_{\max}(\tau) - U_{\max}(\alpha)$ . Нам нужно показать, что

$$\sum_{i=1}^m U(\tau_{\Omega_i}) = U(\tau)$$

или

$$\sum_{i=1}^m (U_{\max}(\tau_{\Omega_i}) - U_{\max}(\alpha_{\Omega_i})) = U_{\max}(\tau) - U_{\max}(\alpha). \quad (3.3)$$

Равенство (3.3) приведем к виду

$$U_{\max}(\alpha) - \sum_{i=1}^m U_{\max}(\alpha_{\Omega_i}) = U_{\max}(\tau) - \sum_{i=1}^m U_{\max}(\tau_{\Omega_i}). \quad (3.4)$$

Преобразуем правую и левую части последнего равенства. Согласно определению существует такая функция  $f \in \mathcal{F}_\tau$ , что  $U(f) = U_{\max}(\tau)$ . Отметим, что выбор  $f$  сводится к решению независимых оптимизационных задач на множествах  $\Omega_i$ , поэтому  $U(f_i) = U_{\max}(\tau_{\Omega_i})$ , где  $f_i$  – сужение функции  $f$  на множество  $\Omega_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Таким образом, правая часть (3.4) преобразуется к виду

$$U_{\max}(\tau) - \sum_{i=1}^m U_{\max}(\tau_{\Omega_i}) = U(f) - \sum_{i=1}^m U(f_i).$$

В соответствии с утверждением, функция  $f$  имеет различные значения на разбиении  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , которое индуцировано отношением эквивалентности  $\tau \cap \tau^{-1}$ . Поскольку разбиение  $V$  является более мелким, чем разбиение  $\{\Omega_1, \dots, \Omega_m\}$ , то можно выбрать функцию  $\varphi : f(\Omega) \rightarrow \{1, \dots, m\}$  таким образом, что  $\Omega_k = \{\omega \in \Omega \mid \varphi(f(\omega)) = k\}$ . Это будет тогда, когда  $\varphi(f(v_i)) = k$  при  $v_i \subseteq \Omega_k$ . Тогда в силу аксиомы 6 для меры информативности  $U$  на  $\mathcal{F}$  получим

$$U(f) - \sum_{i=1}^m U(f_i) = U(\varphi \circ f).$$

Здесь функция  $g = \varphi \circ f$  вычисляется по правилу:  $g(\omega) = k$ , если  $\omega \in \Omega_k$ . Рассуждая аналогичным образом, можно убедиться, что

$$U_{\max}(\alpha) - \sum_{i=1}^m U_{\max}(\alpha_{\Omega_i}) = U(g),$$

т.е. равенство (3.4) справедливо и аксиома 10 также выполняется.

Таким образом, доказанное утверждение позволяет нам в качестве меры неопределенности знакового представления использовать функционал  $\hat{U}_{up}$ . Кроме того, утверждение 5 показывает, что аксиомы 7–10 не противоречивы.

Получение значений  $U(f)$ ,  $f \in \mathcal{F}$  и  $U_{\max}(\tau)$ ,  $\tau \in \mathcal{T}$ , не представляет никаких трудностей, в то время как расчет значения  $\hat{U}_{up}(\tau)$ ,  $\tau \in \mathcal{T}$ , является довольно трудоемкой задачей. Рассмотрим вычисление  $U(f)$ ,  $U_{\max}(\tau_f)$  и  $\hat{U}_{up}(\tau_f)$  на примере модельного изображения. Для нахождения  $U(f)$  необходимо подсчитать количество пикселей на изображении для каждого уровня яркости. На рис. 2 приведена гистограмма модельного изображения, которое содержит шесть градаций яркости с частотами появления 2/20, 2/20, 6/20, 7/20, 2/20, 1/20. Подставляя значения частот в выражение (2.1) и учитывая, что  $U(f) = N\bar{U}(f)$ , имеем,  $U(f) = 31.38c$ , где  $c$  – некоторая постоянная величина, см. (3.2).

Вычисление максимальной информативности знакового представления основано на анализе классов эквивалентности отношения  $\tau \cap \tau^{-1}$ . На рис. 3 содержится граф отношения эквивалентности для модельного изображения, состоящий из семи компонент связности, включающих 2, 6, 7, 1, 2, 1, 1 элементов соответственно. Подставляя данные значения в выражение (3.2), получим  $U_{\max}(\tau_f) = 32.77c$ . В данном случае,  $U(f) < U_{\max}(\tau_f)$ , поскольку различным классам эквивалентности отношения  $\tau \cap \tau^{-1}$  соответствуют одинаковые значения яркости на изображении. На рис. 4 представлен граф продолжения отношения  $\tau$  на классы эквивалентности  $v_i$ , порожденные отношением эквивалентности  $\tau \cap \tau^{-1}$ .

На рис. 5 дано изображение, полученное с помощью алгоритма восстановления, реализующего модифицированную процедуру формирования вершин графа (см. доказательство утверждения 1 и замечание 1), в которой на каждом шаге следующая вершина выбирается на основе критерия минимальной информативности. Для этого находим на графе  $G^{(i)}$  путь с наибольшей стоимостью  $\sum_{k=1}^l |v_{i_k}|$ . Строим граф  $G^{(i+1)}$  путем удаления вершин  $(v_{i_1}, \dots, v_{i_l})$  из графа  $G^{(i)}$ . Формируем множество  $\Omega^{i+1}$  следующим образом:

$$\Omega_{i+1} = \bigcup_{k=1}^l v_{i_k}.$$

Результатом работы данного алгоритма будет разбиение  $\{\Omega_1, \dots, \Omega_m\}$  множества пикселей  $\Omega$ . Рассчитаем верхнюю оценку  $\hat{U}(\tau)$  по следующей формуле:

$$\hat{U}_{up}(\tau) \leq -cN \sum_{i=1}^m p(i) \ln p(i), \quad (3.5)$$

где  $p(i) = |\Omega_i|/N$  и  $N = |\Omega|$ . В нашем примере на графе  $G^{(0)}$  путь с наибольшей стоимостью  $\Omega_1 = \{0, 1, 2, 5, 6\}$ ,  $|\Omega_1| = 17$ . Построим граф  $G^{(1)}$  путем исключения из графа  $G^{(0)}$  вершин  $\Omega_1$ , в итоге получим граф, состоящий из компонент  $\Omega_2 = \{4\}$ ,  $|\Omega_2| = 2$  и  $\Omega_3 = \{3\}$ ,  $|\Omega_3| = 1$ . Таким образом, в соответствии с (3.5) значение меры максимальной неопределенности знакового представления  $\hat{U}_{up}(\tau_f) \leq 10.36c$ . Другим словами, при переходе от исходного изображения к соответствующему знаковому представлению сохраняется значительная часть информации, содержащейся в изображении. Потери информации легко видеть на изображении, восстановленном по знаковому представлению на основе принципа минимума информативности. На рис. 5 видно, что восстановленное изображение несет в себе минимальное число градаций яркости, необходимое для сохранения отношения порядка на соседних пикселях (для сравнения см. рис. 4, на котором заметно, что классы эквивалентности 0 и 4 имеют различную яркость).

На рис. 6 объединены результаты восстановления изображения лица по оконным знаковым представлениям, построенным по исходному изображению, а также при различном значении параметра  $\varepsilon$  в выражении (1.3). В таблице сведены результаты вычисления функционалов  $U(f)$ ,  $U_{\max}(\tau_f)$  и  $\hat{U}_{up}(\tau_f)$  для изображения лица (рис. 6) и соответствующих ему оконных знаковых представлений. Как видно из таблицы, с увеличением размера окрестности, в пределах которой рассматриваются отношения на пикселях в оконном знаковом представлении, верхняя оценка меры неопределенности уменьшается и становится равной нулю для полного знакового представления. Кроме того, снижаются значения и меры максимальной информативности знакового представления, а для полного знакового представления она совпадает с информативностью изображения.

**Заключение.** В работе введено знаковое представление изображений и исследованы наиболее важные его свойства. Ввиду того, что одному и тому же знаковому представлению соответствует множество изображений, возникает задача выбора изображения, которое наилучшим в некотором смысле образом характеризует класс эквивалентных изображений. В качестве критерия выбора наилучшего изображения предлагается использовать принцип минимума информативности, применение которого базируется на мерах информативности и неопределенности на знаковых представлениях изображений. Развиваемый в работе аксиоматический подход к введению мер информативности и неопределенности приводит к мерам, обладающим хорошо известными свойствами энтропии Шеннона. В заключительной части работы рассматривается пример вычисления мер информативности и неопределенности знаковых представлений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гончаров А.В., Каркищенко А.Н. Влияние освещенности на качество распознавания фронтальных лиц // Изв. ЮФУ. Технические науки. Тематический выпуск “Интеллектуальные САПР”. 2008. V. 4(81). С. 82–92.
2. Goncharov A., Gubarev V. Comparison of high-level and low-level face recognition methods // Pattern recognition and image analysis: new information technologies, 2008. V. 9. P. 178–181.
3. Goncharov A., Melnichenko A. Pseudometric approach to content based image retrieval and near duplicates detection // Российский семинар по оценке методов информационного поиска. Труды РОМИП 2007–2008. 2008. С. 120–134.
4. Кисель Я. Mail.ru на РОМИП. Алгоритм поиска нечетких дубликатов в коллекции изображений // Российский семинар по оценке методов информационного поиска. Труды РОМИП 2007–2008. С. 170–173.
5. Foo J., Zobel J., Sinha R., Tahaghoghi S.M.M. Detection of near-duplicate images for web search // Proc. 6th ACM Internat. Conf. on Image and video retrieval. N.Y., USA, 2007. P. 557–564.
6. Wang Z., Josephson W., Lv Q. et al. Filtering image spam with near-duplicate detection // Proc. Fourth Conf. on Email and AntiSpam, CEAS'2007. California, USA, 2007.
7. Freeman H. Computer processing of line-drawing images // ACM Comput. Surv. 1974. V. 6(1). P. 57–97.
8. Пытьев Ю.П. Морфологический анализ изображений // Докл. АН СССР. 1983. Т. 296. № 5. С. 1061–1064.
9. Визильтер Ю.В. Обобщенная проективная морфология // Компьютерная оптика. 2008. Т. 32. № 4. С. 384–399.
10. Vizil'ter Yu.V., Zheltov S.Yu. Projective morphologies and their application in structural analysis of digital images // J. Computer and Systems Sciences International. 2008. V. 47. № 6. P. 944–958.
11. Bronevich A.G., Lepskiy A.E. Geometrical fuzzy measures in image processing and pattern recognition // Proc. 10th IFSA World Congress. Istanbul, Turkey. 2003. P. 151–154.
12. Броневич А.Г., Ленский А.Е. Аксиоматический подход к задаче нахождения оптимального полигонального представления контура // Интеллектуальные системы. 2005. Т. 9(1–4). С. 121–134.
13. Bronevich A.G., Semeriy O.S. An information measure-based grayscale image segmentation // Pattern Recognition and Image Analysis. 2006. V. 16(2). P. 201–207.
14. Aczél J. Lectures on functional equations and applications. N.Y.: Acad. Press, 1966.
15. Pratt W.K. Digital Image Processing. Wiley, 1978.
16. Klir G.J. Uncertainty and Information. Foundations of Generalized Information Theory. Wiley-Interscience, 2006.