Условия слабой консервативности регуляризованных явных разностных схем для пространственно одномерной квазигазодинамической системы уравнений

А.А. Злотник, Т.А. Ломоносов

НИУ Высшая школа экономики, департамент математики на факультете экономических наук, 101000 Москва, ул. Мясницкая, 20
e-mail: azlotnik2007@mail.ru, aladdin93@bk.ru

Аннотация

Рассматриваются явные двухслойные по времени симметричные трехточечные по пространству разностные схемы для пространственно одномерной квазигазодинамической системы уравнений Схемы основаны на специальных квазигазо/гидродинамических регуляризациях этой системы. Для линеаризованных на постоянном решении схем выводятся необходимое условие и критерий слабой консервативности в L^2 задачи Коши по начальным данным.

1 Введение

Вопросы устойчивости разностных схем для модельных задач газовой динамики хорошо представлены в литературе [1, 2, 12]. В данной работе рассматриваются разностные схемы для системы уравнений пространственно одномерной газовой динамики. Эти схемы явные двухслойные по времени и симметричные трехточечные по пространству. Схемы основаны на специальных квазигазо/гидродинамических (КГД) [3, 4, 14] регуляризациях указанной системы уравнений (без регуляризации схемы неустойчивы).

Для линеаризованных на постоянном решении схем выводятся необходимое условие и критерий слабой консервативности (иначе говоря, равномерной устойчивости в L^2 с постоянной 1) задачи Коши по начальным данным. На практике в подобных задачах часто ограничиваются необходимым условием, поэтому важно знать, в какой степени это правомерно делать.

2 Система уравнений, разностные схемы и их линеаризация

Пространственно одномерная КГД-система уранений состоит из законов сохранения массы, импульса и полной энергии:

$$\partial_t\rho + \partial_x j = 0, \tag{1}$$

$$\partial_t(\rho u) + \partial_x(ju + p) = \partial_x\Pi + (\rho - \tau\partial_x(\rho u))F, \tag{2}$$

$$\partial_t E + \partial_x\{(u-w)(E+p)\} = -\partial_x q + \partial_x(\Pi u) + \rho(u-w)F + Q, \tag{3}$$

где $\rho > 0$, u — плотность и скорость газа, $E = 0.5\rho u^2 + \rho\varepsilon$ — полная энергия газа, а p — давление газа, причем $p'(\rho) > 0$. Уравнения рассматриваются при $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, и используются уравнения состояния совершенного политропного газа

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \varepsilon = c_V\theta$$

с постоянными $\gamma > 1, c_V > 0$. Здесь ε и θ - внутренняя энергия и абсолютная температура соответственно.

Введём на $\mathbb{R}$ равномерную сетку ω_h с узлами $x_k = kh$, $k \in \mathbb{Z}$ с шагом $h = X/N$, а также вспомогательную сетку ω_h^* с узлами $x_{k+1/2} = (k+0.5)h$, $k \in \mathbb{Z}$. Введем равномерную сетку по t с узлами $t_m = m\Delta t$, $m \geqslant 0$ с шагом $\Delta t > 0$. Определим сеточные операторы сдвига, усреднения и разностные отношения:

$$v_{\pm,k} = v_{k\pm 1}, \quad (sv)_{k-1/2} = \frac{v_k + v_{k+1}}{2}, \quad (\delta v)_{k-1/2} = \frac{v_k - v_{k-1}}{h},$$
$$(\delta^* y)_k = \frac{y_{k+1/2} - y_{k-1/2}}{h}, \quad \delta_t v = \frac{\hat{v} - v}{\Delta t}, \quad \hat{v}^m = v^{m+1}.$$

Рассмотрим стандартную явную двухслойную по времени симметричную трехточечную по x дискретизацию уравнений (4)–(6):

$$\partial_t \rho + \delta^* j = 0, \tag{4}$$
$$\partial_t(\rho u) + \delta^*\big(j \cdot su + sp\big) = \delta^* \Pi, \tag{5}$$
$$\partial_t E + \delta^*\{(su - w)(sE + sp)\} = \delta^*(-q + \Pi \cdot su), \tag{6}$$

где

$$j = s\rho(su - w), sE = 0.5 s\rho(su)^2 + s(\rho\varepsilon),$$
$$w = \frac{\tau}{s\rho}\delta(\rho u^2 + p), \hat{w} = \frac{s\tau}{s\rho}(s\rho \cdot su \cdot \delta u + \delta p),$$
$$\Pi = \nu\delta u + s\rho \cdot su \cdot \hat{w} + \tau(su\delta p + \gamma sp\delta u),$$
$$-q = \varkappa\delta\theta + \tau\left\{s\rho \cdot (su)^2(\delta\varepsilon + sp \cdot \delta(\frac{1}{\rho})\right\}.$$

Здесь основные искомые функции $\rho > 0$, u, ε и параметр τ определены на ω_h, а $j, w, \hat{w}, \Pi$ — на ω_h^*. Для сокращения количества скобок считается, что, например, $s\rho \cdot su = (s\rho)su$.

3 Анализ слабой консервативности

Перейдём сперва к безразмерным величинам $\tilde{\rho}^m = \frac{\rho^m}{\rho_\star}, \tilde{u}^m = \frac{\sqrt{\gamma}u^m}{c_*}, \tilde{\varepsilon}^m = \frac{\varepsilon^m}{\sqrt{\gamma-1}\varepsilon_\star}$.

Здесь $\rho_*, u_* = 0, \varepsilon_*$ - фоновые начальные данные, а c_* - фоновая скорость звука. Далее для компактности опустим тильды над безразмерными величинами.

Введём вектор-столбец функцию $\mathbf{y}^m = (\rho^m \; u^m \; \varepsilon^m)^T$, $m \geqslant 0$ и запишем линеаризованную разностную схему в матричном виде

$$\hat{\mathbf{y}} = B_- \mathbf{y}_- + B\mathbf{y} + B_+ \mathbf{y}_+, \tag{7}$$

где B_-, B, B_+ - некоторые матрицы, определяющие оператор перехода к новому слою.

Введём гильбертово пространство H комплекснозначных квадратично суммируемых вектор-функций на ω_h, т.е. с конечной нормой

$$\|\mathbf{y}\|_H = \Big(h \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\mathbf{y}_k|^2\Big)^{1/2}.$$

При $\mathbf{y}^0 = (\rho^0 \; u^0 \; \varepsilon^0)^T \in H$ имеем $\mathbf{y}^m \in H$ при всех $m \geqslant 1$. Поставим вопрос о *слабой консервативности* схемы (7) в смысле выполнения оценки

$$\sup_{m \geqslant 0} \|\mathbf{y}^m\|_H \leqslant \|\mathbf{y}^0\|_H \quad \forall \mathbf{y}^0 \in H. \tag{8}$$

Разумеется, оценка (8) гарантирует устойчивость в H по начальным данным.

Подставим в (7) частное решение вида $\mathbf{y}_k^m = e^{\mathbf{i}k\xi}\mathbf{v}^m(\xi)$, $k \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 0$, где $\mathbf{i}$ — мнимая единица, $0 \leqslant \xi \leqslant 2\pi$ и получим

$$\hat{\mathbf{v}}(\xi) = G(\xi)\mathbf{v}(\xi), \tag{9}$$

где матрица $G(\xi)$ представима в виде

$$G(\xi) = I - F, F = \mathbf{i}b(\xi)B + c(\xi)A, A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{\gamma-1} \\ 0 & \gamma+\alpha_s & 0 \\ \sqrt{\gamma-1} & 0 & (1+a)\gamma - 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{\gamma-1} \\ 0 & \sqrt{\gamma-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь I — единичная матрица, $b(\xi) = \beta \sin\xi$, $c(\xi) = \frac{4\alpha\beta}{\sqrt{\gamma}}\sin^2\frac{\xi}{2}$, $a = \frac{\alpha_{Pr}}{\gamma-1}$, а α_s - вязкость. Для компактности введём обозначения $\omega_1 = 4\alpha\beta\theta$, $\theta = \sin^2\frac{\xi}{2} \in [0,1]$, $\omega_2 = \beta\sin\xi$; для дальнейшего важно, что $\omega_2^2 = 4\beta^2\theta(1-\theta)$.

Известно (см. аналогичные формулы в [2]), что при $\mathbf{y}^0 = (\rho^0\ u^0\ \varepsilon^0)^T \in H$ можно ввести функцию $\mathbf{v}^0 \in L^2(0,2\pi)$ такую, что

$$\mathbf{v}^0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathbf{y}_k^0 e^{-\mathbf{i}k\xi},$$

и записать решение схемы (7) в интегральной форме

$$\mathbf{y}_k^m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}\mathbf{v}^m(\xi)e^{\mathbf{i}k\xi}\,d\xi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где $\mathbf{v}^m \in L^2(0,2\pi)$ в силу (9). При этом справедливо равенство Парсеваля

$$\|\mathbf{y}^m\|_H = \sqrt{h}\,\|\mathbf{v}^m\|_{L^2(0,2\pi)}, \quad m \geqslant 0. \tag{10}$$

Известно, что условие

$$\max_{0\leqslant\xi\leqslant2\pi}\max_l|\lambda_l\big(G(\xi)\big)| \leqslant 1 \tag{11}$$

является *необходимым условием* справедливости (8) (см. аналогичный результат в [2]). Здесь и ниже $\lambda_l(A)$ — собственные значения матрицы A.

Лемма 1. *Выполнение неравенства*

$$\max_{0\leqslant\xi\leqslant2\pi}\max_l\lambda_l\big((G^*G)(\xi)\big) \leqslant 1 \tag{12}$$

необходимо и достаточно для справедливости (8).

Доказательство. В силу равенства Парсеваля (10) и формулы (9) имеем

$$h^{-1}\|\hat{\mathbf{y}}\|_H^2 = \|\hat{\mathbf{v}}\|_{L^2(0,2\pi)}^2 = \|G\mathbf{v}\|_{L^2(0,2\pi)}^2 = (G^*G\mathbf{v},\mathbf{v})_{L^2(0,2\pi)}.$$

Поскольку $(G^*G)(\xi) \geqslant 0$ — эрмитова матрица, то она имеет спектральное разложение $(G^*G)(\xi) = U^*(\xi)\Lambda(\xi)U(\xi)$, где $U(\xi)$ — унитарная матрица, а $\Lambda(\xi)$ — диагональная матрица с числами $\lambda_l\big((G^*G)(\xi)\big)$ на диагонали. Поэтому для $z(\xi) := U(\xi)\mathbf{v}(\xi)$ имеем

$$(G^*G\mathbf{v},\mathbf{v})_{L^2(0,2\pi)} = (\Lambda\mathbf{z},\mathbf{z})_{L^2(0,2\pi)} = \|\Lambda^{1/2}\mathbf{z}\|_{L^2(0,2\pi)}^2.$$

Отсюда $\|\mathbf{y}^m\|_H^2 = h\|\Lambda^{m/2}\mathbf{z}^0\|_{L^2(0,2\pi)}^2$ при $m \geqslant 0$, и неравенство (8) эквивалентно следующему

$$\sup_{m\geqslant0}\|\Lambda^{m/2}\mathbf{z}^0\|_{L^2(0,2\pi)}^2 \leqslant \|\mathbf{z}^0\|_{L^2(0,2\pi)}^2 \quad \forall\mathbf{z}^0 \in L^2(0,2\pi).$$

Оно верно тогда и только тогда, когда выполнено неравенство (12). □

Замечание 1. *При выполнении условия* (12) *фактически выполнено более сильное, чем* (8)*, свойство невозрастания* $\|\mathbf{y}^m\|_H$ *по* $m \geqslant 0$.

В этой лемме вид и порядок матрицы G несущественны и фактически она справедлива в широкой общности.

Лемма 2. *Пусть матрица* $F(\xi)$ *задаётся формулой* $F(\xi) = I - G(\xi)$*, где* I *— единичная матрица. Тогда неравенство* (12) *выполнено в том и только том случае, когда матрица*

$$R(\xi) = F(\xi) + F^*(\xi) - F^*(\xi)F(\xi),$$

где $F^*(\xi)$ *— матрица, эрмитово сопряжённая к* $F(\xi)$*, является положительно полуопределённой матрицей для всех* $\xi \in [0, 2\pi]$.

Доказательство. Данный результат легко выводится из того факта, что равенство

$$G^*(\xi)G(\xi)x = \lambda_\xi x$$

влечёт за собой равенство

$$R(\xi)x = (1 - \lambda_\xi)x,$$

поскольку $G^*(\xi)G(\xi) = I - R(\xi)$. □

Теорема 1. *Для выполнения критерия* (12) *необходимо, чтобы*

$$\beta \leqslant \min\left\{\frac{2\alpha}{\sqrt{\gamma}}, \frac{\sqrt{\gamma}}{2\alpha(\gamma+\alpha_s)}, \frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha}\frac{1}{(1+a)\gamma + \sqrt{((1+a)\gamma)^2 - 4a\gamma}}\right\}. \tag{13}$$

Доказательство. Матрица $R(\theta)$ является эрмитово-сопряжённой, поэтому мы опишем матрицу путём задания её элементов:

$$R_{11} = 4\beta\theta\left(\frac{2\alpha}{\sqrt{\gamma}} + \beta\left(-4\theta\alpha^2 + \theta - 1\right)\right);$$

$$R_{12} = 4\beta\theta\left(\frac{2\alpha}{\sqrt{\gamma}} + \beta\left(-4\theta\alpha^2 + \theta - 1\right)\right);$$

$$R_{13} = -4\beta\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\theta\left(4(a+1)\beta\sqrt{\gamma}\theta\alpha^2 - 2\alpha - \beta\sqrt{\gamma}(\theta-1)\right);$$

$$R_{22} = \frac{4\beta\theta\left(\beta(\theta-1)\gamma^2 + 2\alpha\left(\gamma+\alpha_s\right)\sqrt{\gamma} - 4\alpha^2\beta\theta\left(\gamma+\alpha_s\right)^2\right)}{\gamma};$$

$$R_{23} = 8i\alpha\beta^2\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\theta\sqrt{-(\theta-1)\theta}\left(a\gamma - \alpha_s\right);$$

$$R_{33} = 4\beta\theta\left(-4\beta\left(\gamma(a+1)^2 - 2a - 1\right)\theta\alpha^2 + \frac{2(a\gamma+\gamma-1)\alpha}{\sqrt{\gamma}} + \beta(\gamma-1)(\theta-1)\right);$$

Для исследования матрицы на положительную полуопределённость воспользуемся обобщением критерия Сильвестра: *эрмитова матрица тогда и только тогда является положительно полуопределённой, когда все её главные миноры неотрицательны* (в данном случае мы рассматриваем **все** главные миноры, а не только угловые).

Применяя данный критерий к нашей матрице $R(\theta)$, получим систему неравенств

$$\textbf{от } M_1^1: \beta\left(4\alpha^2\sqrt{\gamma}\theta - \sqrt{\gamma}\theta + \sqrt{\gamma}\right) - 2\alpha \leqslant 0, \tag{14}$$

$$\textbf{от } M_2^2: -2\alpha\gamma^{3/2} + \beta\left(\gamma^2 + \theta\left(\left(4\alpha^2 - 1\right)\gamma^2 + 8\alpha^2\gamma\alpha_s + 4\alpha^2\alpha_s^2\right)\right) - 2\alpha\sqrt{\gamma}\alpha_s \leqslant 0, \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\textbf{от } M_3^3: 2\alpha + \beta\left(\theta\left(\gamma^{3/2}\left(4\alpha^2 + 4\alpha^2a^2 + 8\alpha^2a - 1\right) + \sqrt{\gamma}\left(-4\alpha^2 - 8\alpha^2a + 1\right)\right) + \gamma^{3/2} - \sqrt{\gamma}\right) +\\ + \gamma(-2\alpha - 2\alpha a) \leqslant 0,\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\textbf{от } M_{12}^{12}: \left(\beta\left(\gamma + \theta\left(\left(4\alpha^2 - 1\right)\gamma + 4\alpha^2\alpha_s\right)\right) - 2\alpha\sqrt{\gamma}\right) \times\\ \times\left(-2\alpha\gamma + \beta\left(\gamma^{3/2} + \theta\left(\left(4\alpha^2 - 1\right)\gamma^{3/2} + 4\alpha^2\sqrt{\gamma}\alpha_s\right)\right) - 2\alpha\alpha_s\right) \geqslant 0,\end{aligned} \tag{17}$$

$$\textbf{от } M_{13}^{13}: 2\alpha + \beta^2\left(\theta^2\left(8\alpha^3a - 2\alpha a\gamma\right) + 2\alpha a\gamma\theta\right) + \beta\left(\sqrt{\gamma}\theta\left(-4\alpha^2 - 4\alpha^2a + 1\right) - \sqrt{\gamma}\right) \geqslant 0, \tag{18}$$

$$\begin{aligned}+\ \textbf{от } M_{23}^{23}: \alpha\beta\left(-2\gamma^2((a+2)\gamma - 2)\left(\theta\left(4\alpha^2(a+1) - 1\right) + 1\right) -\right.\\ -2\gamma\alpha_s\left(\theta\left(4\alpha^2((a+1)(a+3)\gamma - 2a - 3) - \gamma + 1\right) + \gamma - 1\right) - 8\alpha^2\theta(a\gamma + \gamma - 1)\alpha_s^2\Big) +\\ + 4\alpha^2\sqrt{\gamma}(a\gamma + \gamma - 1)(\gamma + \alpha_s) + \beta^2\sqrt{\gamma}\left(\gamma^2\left(\gamma\left(\theta\left(4\alpha^2(a+1) - 1\right) + 1\right)^2 -\right.\right.\\ -\theta\left(16\alpha^4(2a\theta + \theta) + 4\alpha^2((a-2)a - 2)(\theta - 1) + \theta - 2\right) - 1\Big) +\\ +8\alpha^2\theta\alpha_s\left(\gamma\theta\left(-4\alpha^2 + (a+1)\gamma\left(4\alpha^2(a+1) - 1\right) - 8\alpha^2a + a + 1\right) +\right.\\ \left.\left. +(a+1)(\gamma - 1)\gamma + 2\alpha^2\theta\left((a+1)^2\gamma - 2a - 1\right)\alpha_s\right)\right) \geqslant 0\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\textbf{от } M_{123}^{123} = \det R: \left(\beta\left(\gamma + \theta\left(\left(4\alpha^2 - 1\right)\gamma + 4\alpha^2\alpha_s\right)\right) - 2\alpha\sqrt{\gamma}\right) \times\\ \times\left(2\alpha\gamma + \beta^2\left(2\alpha a\gamma\theta + \theta^2\left(\gamma\left(8\alpha^3a - 2\alpha a\right) + 8\alpha^3a\alpha_s\right)\right) +\right.\\ \left. +\beta\left(\theta\left(\gamma^{3/2}\left(-4\alpha^2 - 4\alpha^2a + 1\right) + \sqrt{\gamma}\left(-4\alpha^2a\alpha_s - 4\alpha^2\alpha_s\right)\right) - \gamma^{3/2}\right) + 2\alpha\alpha_s\right) \leqslant 0\end{aligned} \tag{20}$$

Данные неравенства необходимо решить относительно β равномерно по всем $\theta \in [0, 1]$.

Разберёмся сперва с неравеством (14). Прежде всего заметим, что старший коэффициент данного линейного многочлена неотрицателен: $4\alpha^2\sqrt{\gamma}\theta - \sqrt{\gamma}\theta + \sqrt{\gamma} = 4\alpha^2\sqrt{\gamma}\theta + \sqrt{\gamma}(1-\theta)$, а по предположению $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, поэтому при решении данного неравенства знак сохранится, и мы получим

$$\beta \leqslant \frac{2\alpha}{(4\alpha^2 - 1)\sqrt{\gamma}\theta + \sqrt{\gamma}}.$$

Заметим, что знаменатель является строго монотонной функцией относительно θ, а потому максимум по этой переменной будет достигаться на том или ином конце отрезка, поэтому равномерной оценкой будет являться оценка, представляющая собой минимум из значений правой части на концах отрезка:

$$\beta \leqslant \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \min\left\{2\alpha, \frac{1}{2\alpha}\right\} \tag{21}$$

Аналогичным образом, замечая неотрицательность старшего коэффициэнта линейных многочленов в неравенствах (15) и (16), получаем неравенства

$$\beta \leqslant \min\left\{\frac{2\alpha(\gamma+\alpha_s)}{\gamma\sqrt{\gamma}}, \frac{\sqrt{\gamma}}{2\alpha(\gamma+\alpha_s)}\right\} \tag{22}$$

и

$$\beta \leqslant \min\left\{\frac{2\alpha}{\sqrt{\gamma}}\frac{(a+1)\gamma-1}{\gamma-1}, \frac{1}{2\alpha\sqrt{\gamma}}\frac{1}{1+a\left(1-\frac{1}{(a+1)\gamma-1}\right)}\right\} \tag{23}$$

соответственно.

Поскольку выражение в левой части неравенства (17) представимо в виде произведения двух линейных многочленов, то тот же способ приводит к системе неравенств

$$\begin{gathered}
-2\alpha\sqrt{\gamma} + \beta\left[\gamma(1-\theta) + 4\alpha^2\gamma\theta + 4\alpha^2\theta\alpha_s\right] \leqslant 0, \\
-2\alpha(\gamma-\alpha_s) + \beta\left[\gamma\sqrt{\gamma}(1-\theta) + 4\alpha^2\gamma\sqrt{\gamma}\theta + 4\alpha^2\sqrt{\gamma}\theta\alpha_s\right] \leqslant 0,
\end{gathered}$$

равномерным решением которой является

$$\beta \leqslant \min\left\{\frac{2\alpha}{\sqrt{\gamma}}, \frac{\sqrt{\gamma}}{2\alpha(\gamma+\alpha_s)}\right\} \tag{24}$$

При исследовании неравенства (18) найдём сперва аналитическое выражение корней квадратного трёхчлена, стоящего в левой части неравенства. Данный переход является верным, поскольку дискриминант данного трёхчлена

$$D_\beta = \gamma\left(\omega\left(16(a+1)^2\alpha^4\omega + 8(a-1)\alpha^2(\omega-1) + \omega - 2\right) + 1\right) - 64a\alpha^4\omega^2$$

является неотрицательной функцией для всех $\omega \in [0,1]$ при условии, что $\gamma > 1$.

Один из его корней (со знаком минус перед дискриминантом) после проведения алгебраических упрощений приводится к виду:

$$\beta_1^* = \frac{4\alpha}{\sqrt{\gamma}\left(\omega\left(4(a+1)\alpha^2-1\right)+1\right) + \sqrt{\gamma\left(\omega\left(16(a+1)^2\alpha^4\omega + 8(a-1)\alpha^2(\omega-1) + \omega - 2\right)+1\right) - 64a\alpha^4\omega^2}}$$

К сожаению, корень не является монотонной функцией, а при $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ (где лежат наиболее интересные с прикладной точки зрения параметр) точка экстремума лежит внутри отрезка $[0,1]$.

Точки экстремума есть:

$$\omega_{1,2}^* = \frac{\gamma\left(4(a-1)\alpha^2+1\right)\left(4\alpha^2-\gamma\right) \pm 2\sqrt{(\gamma-1)\gamma^2\left(-\left(1-4(a+1)\alpha^2\right)^2\right)\left(4\alpha^4-\alpha^2\gamma\right)}}{\left(4\alpha^2-\gamma\right)\left(-64a\alpha^4 + 8\alpha^2\gamma\left(2(a+1)^2\alpha^2+a-1\right)+\gamma\right)}$$

При этом корень со знаком «минус» перед радикалом всегда неотрицателен. Формальное решение неравенства даёт нам ответ в виде неравенства

$$a > 1 \wedge \left(\left(0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2} \wedge \gamma > 1\right) \vee \left(\frac{1}{2} < \alpha < 1 \wedge \gamma > 4\alpha^2\right)\right),$$

которое всегда выполняется.

Что касается корня со знаком «плюс» перед радикалом, то при $a > 1 \wedge \frac{1}{2} \leqslant \alpha < 1 \wedge \gamma > 4\alpha^2$ он лежит вне отрезка $[0, 1]$, следовательно, не участвует в рассмотрении максимальной и минимальной величины.

Тем самым, при $\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$ наши рассуждения остаются в силе, а при $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ необходимо также принимать во внимание величину

$$\beta_* = \frac{n_1}{n_2},$$

где

$$n_1 = 2\alpha\left(4\alpha^2 - \gamma\right)\left(-64a\alpha^4 + 8\alpha^2\gamma\left(2(a+1)^2\alpha^2 + a - 1\right) + \gamma\right)$$

и

$$\begin{aligned} n_2 = {} & 16a^2\alpha^4\gamma\left(4\alpha^2 - \gamma\right)\left(\sqrt{\frac{\alpha^2(\gamma-1)\gamma}{\gamma - 4\alpha^2}} + \sqrt{\gamma}\right) + \\ & + (2\alpha - 1)(2\alpha + 1)\sqrt{\gamma}\left(\left(4\alpha^2 - 1\right)\sqrt{\gamma}\sqrt{\frac{\alpha^2(\gamma-1)\gamma}{\gamma - 4\alpha^2}}\left(4\alpha^2 - \gamma\right) + \right. \\ & \left. + \sqrt{(\gamma-1)\gamma^2\left(-\left(1 - 4(a+1)\alpha^2\right)^2\right)\left(4\alpha^4 - \alpha^2\gamma\right)}\right) + 4a\alpha^2\left(-4\alpha^2(\gamma - 3)\gamma\left(2\sqrt{\frac{\alpha^2(\gamma-1)\gamma}{\gamma - 4\alpha^2}} + \sqrt{\gamma}\right) + \right. \\ & \left(+ 16\alpha^4(\gamma - 2)\left(2\sqrt{\frac{\alpha^2(\gamma-1)\gamma}{\gamma - 4\alpha^2}} + \sqrt{\gamma}\right) + \sqrt{\gamma}\left(-2\gamma^{3/2}\sqrt{\frac{\alpha^2(\gamma-1)\gamma}{\gamma - 4\alpha^2}}0 + \right.\right. \\ & \left.\left.\left. + \sqrt{\alpha^2(\gamma-1)\gamma^2\left(1 - 4(a+1)\alpha^2\right)^2\left(\gamma - 4\alpha^2\right)} - \gamma^2\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Заметим однако, что данной величиной можно пренебречь, если мы ставим целью получить необходимое условие для выполнения критерия.

□

Тем же приёмом обеспечивается и решение неравенства (19)

$$\beta \leqslant \min\left\{\frac{2\alpha(\gamma + \alpha_s)}{\gamma\sqrt{\gamma}}, \frac{\sqrt{\gamma}}{2\alpha(\gamma + \alpha_s)}, \frac{1}{2\alpha\sqrt{\gamma}}\frac{1}{1 + a\left(1 - \frac{a}{(a+1)\gamma - 1}\right)}\right\}. \tag{25}$$

Как видно из неравенства определитель матрицы разлагается в произведение линейной и квадратичной функции. Если с линейной функцией всё очевидно, то квадратичная требует дополнительного исследования.

С помощью Wolfram Mathematica были найдены два положительных корня данного трёчлена. Приведём как интересующий нас лишь наименьший:

$$\frac{4\alpha\left(\gamma + \alpha_s\right)}{\gamma^{3/2}\left(\omega\left(4(a+1)\alpha^2 - 1\right) + 1\right) + 4(a+1)\alpha^2\sqrt{\gamma}\omega\alpha_s + \sqrt{\gamma\left(\gamma\omega\left(4(a+1)\alpha^2 - 1\right) + 4(a+1)\alpha^2\omega\alpha_s + \gamma\right)^2 - 1}}$$

Благодаря этому, можно рассмотреть взаимное расположение всех трёх корней на концах интервала $[0,1]$, и получить

$$\beta \leqslant \min\{\frac{2\alpha}{\sqrt{\gamma}}, \frac{\sqrt{\gamma}}{2\alpha(\gamma+\alpha_s)}, \frac{\sqrt{\gamma}}{\alpha}\frac{1}{(a+1)\gamma+\sqrt{(a+1)^2\gamma^2-4a\gamma}}\}. \tag{26}$$

Мы можем найти производную знаменателя и приравнять её к нулю. Всего есть две точки ω_*, которые могут быть точками экстремума:

$$\omega_* = \frac{-4a\alpha^2(\gamma-2)\gamma\left(\left(4\alpha^2-1\right)\gamma+4\alpha^2\alpha_s\right)(\gamma+\alpha_s)^2 \pm 2\sqrt{-a(\gamma-1)\gamma^3(\gamma+\alpha_s)^3\left(\left(4\alpha^2-1\right)\gamma+4\alpha^2\alpha_s\right)(\alpha}}{(\gamma+\alpha_s)\left(\left(4\alpha^2-1\right)\gamma+4\alpha^2\alpha_s\right)\left(\gamma^2\left(\gamma\left(1-4(a+1)\alpha^2\right)^2+16a\left(1-4\alpha^2\right)\alpha^2\right)+8\alpha^2\alpha_s(\gamma((a+}$$

Исследованием расположения этих точек на числовой прямой выявлено, что при наших параметрах оба они лежат вне отрезка $[0,1]$.

Объединяя неравенства (21)—(26), получим неравенство (13), что и требовалось доказать.

4 Итог

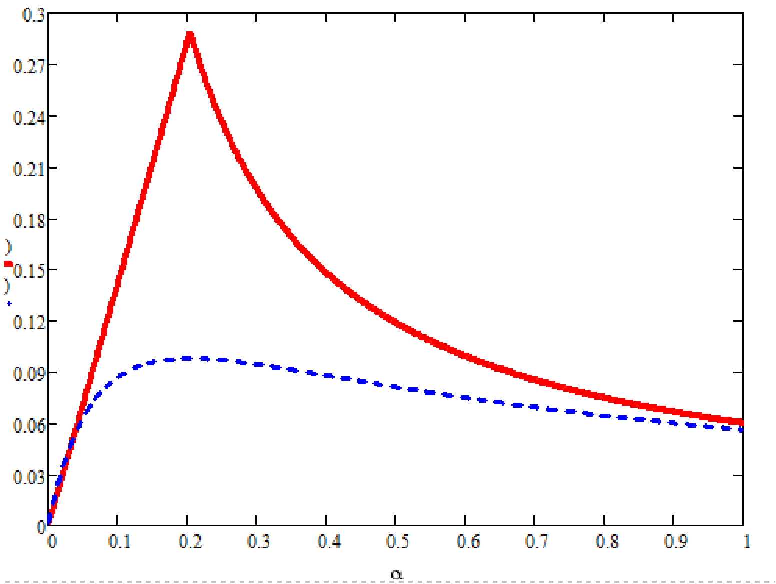

Рис. 1: Сравнение критерия и достаточного условия

На рис. 1 сплошной красной линией представлен полученный в настоящей работе критерий слабой консервативности рассматриваемой схемы, а синей пунктирной линией — достаточное условие, полученное Ю. В. Шеретовым в [13].

Заметим, что в малой окрестности точек 0 и 1 параметра α два условия практически совпадают, а в области, которая наиболее широко используется на практике, полученный результат куда шире уже известного результата.

Список литературы

[1] *Бахвалов Н.С.. Жидков Е.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. 3-е изд. М.: Бином. Лаборатория Знаний, 2003.

[2] *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы. 2-е изд. М.: Наука, 1977.

[3] *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.

[4] *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчёта вязких течений. М: Научный Мир, 2007.

[5] *Злотник А.А., Четверушкин Б.Н.* О параболичности квазигазодинамической системы уравнений, ее гиперболической 2-го порядка модификации и устойчивости малых возмущений для них // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 3. С. 445–472.

[6] *Злотник А.А.* О параболичности квазигидродинамической системы уравнений и устойчивости малых возмущений для нее // Матем. заметки. 2008. Т. 83. № 5. С. 667–682.

[7] *Злотник А.А.* Энергетические равенства и оценки для баротропных квазигазо– и квазигидродинамических систем уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 2. С. 325–337.

[8] *Злотник А.А.* О построении квазигазодинамических систем уравнений и баротропной системе с потенциальной массовой силой // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 4. С. 65–79.

[9] *Злотник А.А.* Пространственная дискретизация одномерной баротропной квазигазодинамической системы уравнений и уравнение энергетического баланса // Матем. моделирование. 2012. Т. 24. № 10. С. 51–64.

[10] *Злотник А.А.* О консервативных пространственных дискретизациях баротропной квазигазодинамической системы уравнений с потенциальной массовой силой // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 2. С. 301–317.

[11] *Zlotnik A., Gavrilin V.* On a conservative finite-difference method for 1D shallow water flows based on regularized equations, in: Math. Problems in Meteorological Model. Math. in Industry, A. Bátkai, P. Csomós, A. Horányi, etc., eds. Vol. 24. P. 16–31. Berlin: Springer, 2016.

[12] *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М: Наука, 1972.

[13] *Шеретов Ю.В.*Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009.

[14] *Шеретов Ю.В.* Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. Регулярная и хаотическая динамика: Москва–Ижевск, 2009.