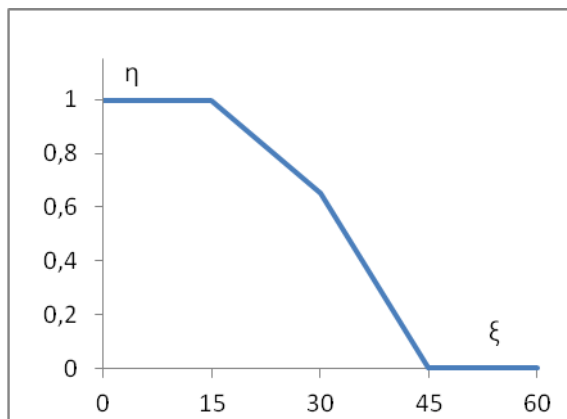


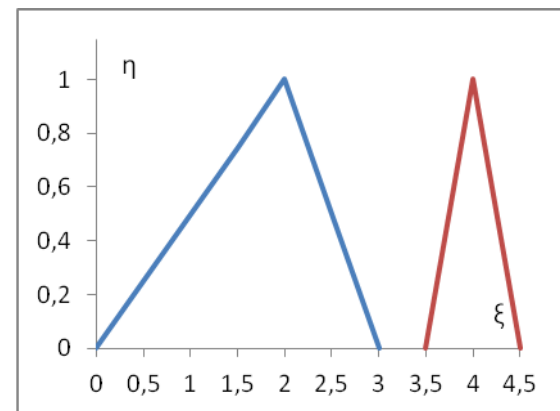
Применение теории нечетких множеств в некоторых эконометрических и оптимизационных задачах

А.С. Шведов

Департамент прикладной экономики НИУ ВШЭ



*Множество молодых людей
как нечеткое множество*



Примеры нечетких чисел

Для обычного множества степень принадлежности каждого элемента к этому множеству либо 0 (элемент множеству не принадлежит), либо 1 (элемент множеству принадлежит). Для нечеткого множества степень принадлежности каждого элемента к этому множеству может быть любым действительным числом от 0 до 1.

Нечеткое число $\tilde{x}$ можно определить путем задания функций $x^L(\eta)$ и $x^R(\eta)$ (левого и правого индекса нечеткого числа $\tilde{x}$).

Zadeh L.A. Fuzzy sets // Information and Control. – 1965. – Vol. 8. – P. 338–353.

Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь, 1982.

Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. 2 изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013.

Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. 2 изд. – М.: Горячая линия – Телеком, 2013.

Основными подходами к включению неопределенности в математическую модель являются, во-первых, использование **теории вероятностей** и, во-вторых, использование **теории нечетких множеств**. И здесь речь идет о двух разных видах неопределенности.

При использовании теории вероятностей неизвестная величина может принимать различные значения, и с каждым значением или с каждой группой значений связывается некоторая вероятность.

При использовании теории нечетких множеств сами значения являются расплывчатыми, неопределенными.

План доклада

1. Нечетко-случайные величины, их моменты
2. Состоятельные оценки ожидания и ковариации нечетко-случайных величин
3. Простая и множественная регрессия с нечеткими данными
4. Нечеткие системы, мягкое переключение от одной линейной модели к другой с помощью нечеткой логики
5. Нечеткое математическое программирование
6. Применение теории нечетких множеств в задаче оценки опционов
7. Нейронные сети и нечеткие системы как универсальные аппроксиматоры

1. Нечетко-случайные величины, их моменты

Kwakernaak H. Fuzzy random variables – I. Definitions and theorems // Information Sciences. – 1978. – Vol. 15. – P. 1–29.

Kwakernaak H. Fuzzy random variables – II. Algorithms and examples for the discrete case // Information Sciences. – 1979. – Vol. 17. – P. 153–178.

Puri M.L., Ralescu D.A. Fuzzy random variables // J. of Mathematical Analysis and Applications. – 1986. – Vol. 114. – P. 409–422.

Colubi A., Dominguez-Menchero J.S., Lopez-Diaz M., Ralescu D.A. (2001) On the formalization of fuzzy random variables. Information Sciences, 133, 3–6.

Feng Y., Hu L., Shu H. (2001) The variance and covariance of fuzzy random variables. Fuzzy Sets and Systems, 120, 487–497.

Шведов А.С. Оценивание средних и ковариаций нечетко-случайных величин // Прикладная эконометрика, т. 42, 2016, с. 121–138.

Пусть J — множество, элементами которого являются компактные множества пространства $\mathbb{R}^2$. Если $K_1, K_2 \in J$, то расстоянием Хаусдорфа между K_1 и K_2 называется наибольшее из чисел

$$\sup_{a_1 \in K_1} \inf_{a_2 \in K_2} \|a_1 - a_2\|, \quad \sup_{a_2 \in K_2} \inf_{a_1 \in K_1} \|a_1 - a_2\|.$$

При таком определении расстояния множество J является метрическим пространством.

Через S обозначим σ -алгебру борелевских подмножеств множества J , то есть наименьшую σ -алгебру, содержащую все открытые подмножества множества J и все замкнутые подмножества множества J .

Пусть (Ω, Σ, P) — вероятностное пространство.

Как обычно, отображение из Ω в J называется измеримым, если прообраз любого множества $M \in S$ входит в σ -алгебру Σ .

Определение. Измеримое отображение $\tilde{X} : \Omega \rightarrow J$ называется нечетко-случайной величиной, если при любом $\omega \in \Omega$ компактное множество $\tilde{X}(\omega)$ является нечетким числом.

Функции $X^L(\omega, \eta)$ и $X^R(\omega, \eta)$ называются, соответственно, левым индексом и правым индексом нечетко-случайной величины $\tilde{X}$.

Теорема. Пусть $\tilde{X}$ — нечетко-случайная величина. Тогда при любом $\eta_0 \in [0, 1]$ функции $X^L(\omega, \eta_0)$ и $X^R(\omega, \eta_0)$ являются измеримыми функциями аргумента ω .

Ожидание нечетко-случайной величины $\tilde{X}$

$$E(\tilde{X}) = 0.5 \int_0^1 \int_{\Omega} (X^L(\omega, \eta) + X^R(\omega, \eta)) dP d\eta.$$

Нечеткое ожидание нечетко-случайной величины $\tilde{X}$ – это нечеткое число $\tilde{x}$ с левым индексом $x^L(\eta)$ и с правым индексом $x^R(\eta)$,

$$x^L(\eta) = \int_{\Omega} X^L(\omega, \eta) dP, \quad x^R(\eta) = \int_{\Omega} X^R(\omega, \eta) dP.$$

Ковариация нечетко-случайных величин $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$

$$\begin{aligned} Cov(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0.25 \int_0^1 \int_{\Omega} & (X^L(\omega, \eta) + X^R(\omega, \eta) - x^L(\eta) - x^R(\eta)) \\ & (Y^L(\omega, \eta) + Y^R(\omega, \eta) - y^L(\eta) - y^R(\eta)) dP d\eta. \end{aligned}$$

Для любых нечетко-случайных величин $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, $\tilde{Z}$ для любых действительных чисел λ , μ

$$Cov(\tilde{X}, \tilde{Y}) = Cov(\tilde{Y}, \tilde{X}),$$

$$Cov(\tilde{X} + \tilde{Y}, \tilde{Z}) = Cov(\tilde{X}, \tilde{Z}) + Cov(\tilde{Y}, \tilde{Z}),$$

$$Cov(\lambda \tilde{X}, \mu \tilde{Y}) = \lambda \mu Cov(\tilde{X}, \tilde{Y}),$$

$$Var(\tilde{X} + \tilde{Y}) = Var(\tilde{X}) + Var(\tilde{Y}) + 2Cov(\tilde{X}, \tilde{Y})$$

Имеет место неравенство Коши – Буняковского, то есть для любых нечетко-случайных величин $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$

$$|Cov(\tilde{X}, \tilde{Y})| \leq (Var(\tilde{X}))^{1/2} (Var(\tilde{Y}))^{1/2}.$$

Отметим, что в работе (Feng et al., 2001) предлагается определение ковариации нечетко-случайных величин, которое в наших обозначениях имеет вид

$$0.5 \int_0^1 \int_{\Omega} \left(X^L(\omega, \eta) - x^L(\eta) \right) \left(Y^L(\omega, \eta) - y^L(\eta) \right) dP d\eta + \\ + 0.5 \int_0^1 \int_{\Omega} \left(X^R(\omega, \eta) - x^R(\eta) \right) \left(Y^R(\omega, \eta) - y^R(\eta) \right) dP d\eta.$$

Тогда ковариация нечетко-случайных величин $\lambda \tilde{X}$ и $\mu \tilde{Y}$ равна ковариации нечетко-случайных величин $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$, умноженной на $\lambda\mu$, вообще говоря, лишь в том случае, когда знаки действительных чисел λ и μ не являются противоположными.

Пусть $\tilde{u}$ – нечеткое число, Z – случайная величина такая, что $Z(\omega)$ – ограниченная функция на множестве Ω .

Теорема 1. Для нечетко-случайной величины $\tilde{X} = \tilde{u} + Z$

$$E(\tilde{X}) = u + E(Z), \quad \text{Var}(\tilde{X}) = \text{Var}(Z),$$

где u – среднее значение нечеткого числа $\tilde{u}$.

Пусть $\tilde{u}$ – нечеткое число, Z – случайная величина такая, что $Z(\omega)$ – неотрицательная ограниченная функция на множестве Ω . Под нечетко-случайной величиной $Z\tilde{u}$ будем понимать нечетко-случайную величину с индексами

$$X^L(\omega, \eta) = Z(\omega)u^L(\eta), \quad X^R(\omega, \eta) = Z(\omega)u^R(\eta).$$

Теорема 2. Для нечетко-случайной величины $\tilde{X} = Z\tilde{u}$

$$E(\tilde{X}) = uE(Z), \quad \text{Var}(\tilde{X}) = \langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle \text{Var}(Z),$$

где u – среднее значение нечеткого числа $\tilde{u}$, $\langle \tilde{u}, \tilde{u} \rangle = 0.5 \int_0^1 (u^L(\eta) + u^R(\eta)) d\eta$.

Дальнейшие полученные результаты:

- Квантильная функция нечетко-случайной величины.

Для случайной величины X при $p \in (0,1)$

$$q(p) = \inf \Xi_p, \quad \Xi_p = \{\xi \in \mathbb{R} : P(X \leq \xi) > p\}.$$

- Выражения для нечеткого ожидания и ожидания нечетко-случайной величины через квантильную функцию.

Для случайной величины X

$$E(\varphi(X)) = \int_0^1 \varphi(q(p)) dp, \quad E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dF(x).$$

2. Состоятельные оценки ожидания и ковариации нечетко-случайных величин

Akbari M.GH., Rezaei A.H., Waghei Y. (2009) Statistical inference about the variance of fuzzy random variables. *Sakhyā: The Indian Journal of Statistics*, 71-B, Part 2, 206–221.

Colubi A., Coppi R., D’Urso P., Gil M.A. (2007) Statistics with fuzzy random variables. *METRON – International Journal of Statistics*, 65, 277–303.

Colubi A. (2009) Statistical inference about the means of fuzzy random variables: Applications to the analysis of fuzzy- and real-valued data. *Fuzzy Sets and Systems*, 160, 344–356.

Taheri S.M. (2003) Trends in fuzzy statistics. *Austrian Journal of Statistics*, 32, 239–257.

Viertl R. (2011) *Statistical methods for fuzzy data*. Chichester. Wiley.

Шведов А.С. Оценивание средних и ковариаций нечетко-случайных величин // *Прикладная эконометрика*, т. 42, 2016, с. 121–138.

Пусть математической моделью для набора наблюдений $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$ является набор независимых нечетко-случайных величин $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n$.

Пусть $X_i^L(\omega, \eta)$ и $X_i^R(\omega, \eta)$ — индексы нечетко-случайной величины $\tilde{X}_i$. Положим

$$\bar{X}(\omega, \eta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{X_i^L(\omega, \eta) + X_i^R(\omega, \eta)}{2}.$$

Оценка $E(\tilde{X}_i)$:

$$\hat{\mu}(\omega) = \int_0^1 \bar{X}(\omega, \eta) d\eta.$$

Пусть набор нечетких чисел $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n$ — другой набор наблюдений. Математической моделью для этого набора наблюдений является набор нечетко-случайных величин $\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n$. Двумерные нечетко-случайные величины

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{Y}_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \tilde{X}_n \\ \tilde{Y}_n \end{pmatrix}$$

предполагаются независимыми.

Пусть $Y_i^L(\omega, \eta)$ и $Y_i^R(\omega, \eta)$ — индексы нечетко-случайной величины $\tilde{Y}_i$. Положим

$$\bar{Y}(\omega, \eta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i^L(\omega, \eta) + Y_i^R(\omega, \eta)}{2}.$$

Оценка $\text{Cov}(\tilde{X}_i, \tilde{Y}_i)$:

$$\hat{K}(\omega) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \int_0^1 \left(\frac{X_i^L(\omega, \eta) + X_i^R(\omega, \eta)}{2} - \bar{X}(\omega, \eta) \right) \left(\frac{Y_i^L(\omega, \eta) + Y_i^R(\omega, \eta)}{2} - \bar{Y}(\omega, \eta) \right) d\eta$$

3. Простая и множественная регрессия с нечеткими данными

Celmiņš A. Least squares model fitting to fuzzy vector data. Fuzzy Sets Syst. 1987; 22: 245–269.

Diamond P. Fuzzy least squares. Inf. Sci. 1988; 46: 141–157.

Näther W. (2006) Regression with fuzzy data. Computational Statistics and Data Analysis, 51, 235–252.

Bargiela A., Pedrycz W., Nakashima T. Multiple regression with fuzzy data. Fuzzy Sets Syst. 2007; 158: 2169–2188.

González-Rodríguez G., Blanco Á., Colubi A., Lubiano M.A. Estimation of a simple linear regression model for fuzzy random variables. Fuzzy Sets Syst. 2009; 160: 357–370.

Вельдяксов В.Н., Шведов А.С. О методе наименьших квадратов при регрессии с нечеткими данными // Экономический журнал ВШЭ, т. 18, вып. 2, 2014, 328–344.

Вельдяксов В.Н., Шведов А.С. Проверка гипотез при регрессии с нечеткими данными // Экономический журнал ВШЭ, т. 18, вып. 3, 2014, 508–521.

Расстояние между нечеткими числами $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$

$$d(\tilde{z}, \tilde{u}) = \sqrt{\int_0^1 (z^L(\eta) - u^L(\eta))^2 d\eta + \int_0^1 (z^R(\eta) - u^R(\eta))^2 d\eta}.$$

Наблюдения $\tilde{y}_i, \tilde{x}_i, i = 1 \dots n$, – наборы нечетких чисел. Требуется найти действительное число b и нечеткое число $\tilde{a}$, которые доставляют минимум функционалу

$$H(b, \tilde{a}) = \sum_{i=1}^n d^2(\tilde{y}_i, b \tilde{x}_i + \tilde{a}).$$

При $b \geq 0$

$$H(b, \tilde{a}) = \sum_{i=1}^n \int_0^1 (y_i^L(\eta) - b x_i^L(\eta) - a^L(\eta))^2 d\eta + \sum_{i=1}^n \int_0^1 (y_i^R(\eta) - b x_i^R(\eta) - a^R(\eta))^2 d\eta.$$

Первый этап: при фиксированном b определяются функции $a^L(\eta), a^R(\eta)$.

При заданных z_0 и z_1 в классе гладких на $[0,1]$ функций z , удовлетворяющих условиям $z(0) = z_0, z(1) = z_1$, требуется найти функцию $z(\eta)$, доставляющую минимум функционалу $\int_0^1 F(\eta, z(\eta), z'(\eta)) d\eta$. Если функция $z(\eta)$ является локальным минимумом, то при условии гладкости функции F должно выполняться уравнение Эйлера $F_z - \frac{d}{d\eta} F_{z'} = 0$. Если функция F не зависит от z' , то уравнение Эйлера принимает вид $F_z = 0$. Из последнего уравнения нетрудно получить, что:

$$a^L(\eta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_j^L(\eta) - b x_j^L(\eta)), \quad a^R(\eta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_j^R(\eta) - b x_j^R(\eta)).$$

При таком выборе функций $a^L(\eta), a^R(\eta)$ задача минимизации функционала $H(b, \tilde{a})$ сводится к задаче минимизации некоторого функционала $G(b)$.

Дальнейшие полученные результаты:

- состоятельность оценки и свойство близкое к несмещенности;
- доверительные интервалы для параметра регрессии и проверка гипотез;
- обобщение для множественной линейной регрессии;
- оценка параметров регрессии, основанная на использовании инструментальных переменных.

Попов Т.С. Эконометрические модели с нечеткими данными. Магистерская диссертация, НИУ ВШЭ, 2016.

Михалевич А.П. Нечеткая регрессия в экономических задачах. Магистерская диссертация, НИУ ВШЭ, 2017.

Михалевич А.П., Шведов А.С. Оценивание бета-коэффициентов в модели САРМ по нечетким данным. Доклад на XVIII Апрельской международной научной конференции по проблемам развития экономики и общества, Москва, 2017.

4. Нечеткие системы, мягкое переключение от одной линейной модели к другой с помощью нечеткой логики

Takagi T., Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. – 1985. – №. 1. – С. 116–132.

Sugeno M., Kang G. T. Structure identification of fuzzy model //Fuzzy Sets and Systems. – 1988. – Т. 28. – №. 1. – С. 15–33.

Lilly J.H. Fuzzy control and identification. – Hoboken (NJ): Wiley, 2010. – 231 p.

Zhang H., Liu D. Fuzzy Modeling and Fuzzy Control. – Boston (MA): Birkhäuser, 2006. – 416 p.

Могилевич Е.О., Шведов А.С. Анализ динамики фондовых индексов с использованием нечетких моделей Такаги – Сугено // Экономический журнал ВШЭ, т. 21, вып. 3, 2017, 434–450.

Пусть A_j^l ; $l = 1, \dots, d$; $j = 1, \dots, n$ – нечеткие множества, $\mu_{A_j^l}$ – функция принадлежности нечеткого множества A_j^l .

Нечеткая система Такаги – Сугено состоит из n нечетких правил следующего вида:

$$R_j: \text{ЕСЛИ } (x_1 = A_j^1) \text{ И } \dots \text{ И } (x_d = A_j^d), \text{ ТО } y = a_j^0 + a_j^1 x_1 + \dots + a_j^d x_d; \quad j = 1, \dots, n,$$

где $a_j^0, a_j^1, \dots, a_j^d \in \mathbb{R}$. При

$$\xi_j(x) = \frac{\prod_{l=1}^d \mu_{A_j^l}(x_l)}{\sum_{k=1}^n \prod_{l=1}^d \mu_{A_k^l}(x_l)}, \quad j = 1, \dots, n,$$

ВЫХОДОМ ЯВЛЯЕТСЯ

$$y = \sum_{j=1}^n (a_j^0 + a_j^1 x_1 + \dots + a_j^d x_d) \xi_j(x).$$

5. Нечеткое математическое программирование

Lai Y.J., Hwang C.L. Fuzzy mathematical programming. – Berlin: Springer, 1992.

Sakawa M. Fuzzy sets and interactive multiobjective optimization. – N.Y.: Plenum Press, 1993.

Carlsson C., Fuller R. Fuzzy reasoning in decision making and optimization. – Heidelberg: Physica-Verlag, 2002.

Bector C.R., Chandra S. Fuzzy mathematical programming and fuzzy matrix games. – Berlin: Springer, 2005.

Лю Б. Теория и практика неопределенного программирования. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.

Шведов А.С. Нечеткое математическое программирование: краткий обзор // Проблемы управления. – 2017. – Вып. 3. – С. 2–10.

Классическая задача математического программирования состоит в максимизации критерия

$$f(x) \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$g_1(x) \leq b_1, \dots, g_m(x) \leq b_m.$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; функции $f, g_1, \dots, g_m$ действуют из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ и являются известными; $b_1, \dots, b_m$ — заданные действительные числа. В области точек x , удовлетворяющих приведенным ограничениям, требуется найти точку (или точки), в которой функция f достигает максимума. В данной задаче математического программирования максимизируется один критерий. Однако может присутствовать и несколько критериев.

В задаче линейного программирования критерий $cx \rightarrow \max$ при условиях $ax \leq b, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$. Здесь $c = (c_1, \dots, c_n)$ – n -мерный вектор, $b = (b_1, \dots, b_m)'$ – m -мерный вектор, a – $m \times n$ матрица.

В нечетком математическом программировании рассматриваются, в частности, задачи с расплывчатыми неравенствами. Пусть g_0 – желаемый уровень для рассматриваемого критерия. В данном случае g_0 – действительное число. Требуется найти n -мерный вектор $x = (x_1, \dots, x_n)'$ такой, что

$$cx \gtrsim g_0, \quad ax \lesssim b,$$

$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$. Матрица a и вектора b, c те же, что и выше.

Произвольная функция $\mathfrak{R}$, действующая из множества нечетких чисел в множество действительных чисел, может быть выбрана в качестве ранжирующей функции. Для нечетких чисел $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ устанавливается следующее отношение порядка: $\tilde{x} \leq_{\mathfrak{R}} \tilde{y}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R}(\tilde{x}) \leq \mathfrak{R}(\tilde{y})$.

Пусть вместо условия $ax \leq b$, рассмотренного в предыдущем параграфе, требуется использовать условие с матрицей $\{\tilde{a}_{ij}\}$ и с вектором $(\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m)'$, где $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{b}_i$ – нечеткие числа; координаты вектора x – действительные числа. Тогда в качестве условий можно принять

$$\sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} x_j \leq_{\mathfrak{R}} \tilde{b}_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Определение. Функция Pos , определенная на кольце R и принимающая значения в отрезке $[0,1]$, называется мерой возможности, если $Pos(\emptyset) = 0$ и для любых двух множеств $A \in R, B \in R$

$$Pos(A \cup B) = \max(Pos(A), Pos(B)).$$

Пример. Пусть непустое множество $C \in R$ и пусть для любого $A \in R$ выполняется $Pos(A) = 1$, если $A \cap C \neq \emptyset$, и $Pos(A) = 0$, если $A \cap C = \emptyset$. Этот пример объясняет и название меры. Подмножество A является возможным, если оно пересекается с подмножеством C , и является невозможным, если оно не пересекается с подмножеством C .

Пример. Для каждого множества $B \subseteq \mathbb{R}$ определяется $\sup_{u \in B} \mu_{\xi}(u)$. Об этом значении говорят как о возможности того, что нечеткая величина ξ принадлежит множеству B .

Определение. Функция Nec , определенная на кольце R и принимающая значения в отрезке $[0,1]$, задаваемая формулой $Nec(A) = 1 - Pos(\bar{A})$, называется мерой необходимости.

При каждом $\lambda \in [0,1]$

$$M_{\lambda}(A) \stackrel{def}{=} \lambda Pos(A) + (1 - \lambda) Nec(A).$$

Если в приведенной выше задаче математического программирования присутствуют нечеткие параметры, то вместо нее может быть рассмотрена следующая задача возможностного программирования:

$$\gamma \rightarrow \max$$

при условиях

$$M_{\lambda_0}(f(x) \geq \gamma) \geq \alpha_0, \quad M_{\lambda_j}(g_j(x) \leq b_j) \geq \alpha_j, j = 1, \dots, m;$$

здесь $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ — заданные числа.

Шведов А.С. О выпуклости допустимого множества в задаче стохастического линейного программирования. Препринт WP2/2014/01. М.: НИУ ВШЭ, 2014.

Шведов А.С. Нечетко-случайные методы в оболочечном анализе данных. Препринт WP2/2014/05. М.: НИУ ВШЭ, 2014.

Levin V.I. Multicriteria portfolio optimization with semivariance risk measure and fuzzy constraints. Master Thesis, Université du Luxembourg, Luxembourg, 2017.

6. Применение теории нечетких множеств в задаче оценки опционов

Capotortia A., Figà-Talamanca G. On an implicit assessment of fuzzy volatility in the Black and Scholes environment // Fuzzy Sets and Systems 223 (2013), 59 – 71.

Chrysafis A., Papadopoulos K. On theoretical pricing of options with fuzzy estimators // Journal of Computational and Applied Mathematics 223 (2009), 552 –566.

Guerra M.L., Sorini L., Stefanini L. Option price sensitivities through fuzzy numbers // Computers and Mathematics with Applications 61 (2011), 515 – 526.

Thiagarajah K., Thavaneswaran A. Fuzzy random-coefficient volatility models with financial applications // The Journal of Risk Finance 7 (2006), 503 – 524.

Wu H.-C. Pricing European options based on the fuzzy pattern of Black-Scholes formula // Computers & Operators Research, 31 (2004), 1069 – 1081.

Лис А.И. О применении нечетких чисел при оценке опционов // Экономический журнал ВШЭ, т. 19, вып. 2, 2015, 290–303.

7. Нейронные сети и нечеткие системы как универсальные аппроксиматоры

Cybenko G. Approximation by superpositions of sigmoidal function // Mathematics of Control, Signals, and Systems. – 1989. – Vol. 2. – P. 303–314.

Funahashi K.I. On the approximate realization of continuous mappings by neural networks // Neural Networks. – 1989. – Vol. 2. – P. 183–192.

Hornik K., Stinchcombe M., White H. Multilayer feedforward networks are universal approximators // Neural Networks. – 1989. – Vol. 2. – P. 359–366.

Kosko B. Fuzzy systems as universal approximators // in: Proc. IEEE 1992 Int. Conf. Fuzzy Systems (San Diego, CA) Mar. 1992, 1153–1162.

Wang L.-X. Fuzzy systems are universal approximators // in: Proc. IEEE 1992 Int. Conf. Fuzzy Systems (San Diego, CA) Mar. 1992, 1163–1170.

Wang L.-X., Mendel J.M. Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least-squares learning // IEEE Transactions on Neural Networks. – 1992. – Vol. 3. – P. 807–814.

Рассмотрим однонаправленную нейронную сеть типа MISO (multiple input single output) с одним скрытым слоем, состоящим из n нейронов. Входом является $x = (x_1, \dots, x_d)$, выходом является

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^n \beta_j \varphi(w_j x + \theta_j).$$

Здесь $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция активации; $w_j \in \mathbb{R}^d$, $\theta_j \in \mathbb{R}$ – внутренние параметры для j -го нейрона; $\beta_j \in \mathbb{R}$; $w_j x$ – скалярное произведение векторов w_j и x .

Часто используемыми функциями активации являются ступенчатая функции $\varphi(t) = 0$ при $t < 0$, $\varphi(t) = 1$ при $t \geq 0$; функция $\varphi(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$.

Теорема. Пусть функция φ является непрерывной и ограниченной на $\mathbb{R}$, $\varphi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$, $\varphi(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда для любой функции $f \in C([0, 1]^d)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует функция f_n такая, что

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

при всех $x \in [0, 1]^d$.

Благодарю за внимание.