

Экономический журнал ВШЭ. 2018. Т. 22. № 3. С. 418–447.  
*HSE Economic Journal*, 2018, vol. 22, no 3, pp. 418–447.

## Модель оптимального поведения современной российской банковской системы<sup>1</sup>

Пильник Н.П., Радионов С.А., Языков А.А.

В статье описана модель банковской системы России, успешно воспроизводящая широкий набор показателей, характеризующих ее деятельность, – кредиты и депозиты фирм и домохозяйств, ликвидность, номинированные в рублях и в иностранной валюте, обязательные резервы. Описана методика вывода соотношений модели, включающая постановку оптимизационной задачи макроагента «банк». В задаче предполагается максимизация приведенного потока прибыли при бюджетном ограничении, балансов отдельных кредитов и депозитов, ограничений ликвидности и требования достаточности резервов. В статье приводится система уравнений, описывающая решение этой задачи. Подробно описан переход от непрерывного времени к дискретному, новый подход к смягчению условий дополняющей нежесткости, основанный на предположении о наличии в модели магистрального свойства.

Помимо стандартного для моделей такого класса подхода, к оценке параметров модели применен метод многошаговых прогнозов (*multi-step forecasting*). Показано, что стандартный метод оценки позволяет достаточно точно воспроизвести исторические ряды, но дает невысокое качество прогнозов. Метод многошаговых прогнозов, с другой стороны, успешно воспроизводит исторические ряды и дает достаточно точные прогнозы. Проведено сравнение со стандартными эконометрическими конструкциями и показано, что модель с параметрами, полученными методом многошаговых прог-

<sup>1</sup> Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-11-00432).

**Пильник Николай Петрович** – к.э.н., доцент Департамента прикладной экономики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»; с.н.с. ФИЦ ИУ РАН; с.н.с. НИФИ, Центр перспективного финансового планирования, макроэкономического анализа и статистики финансов. E-mail: npilnik@hse.ru

**Радионов Станислав Андреевич** – к.э.н., н.с. Научно-учебной лаборатории макроструктурного моделирования экономики России Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»; н.с. ФИЦ ИУ РАН.; н.с. НИФИ, Центр перспективного финансового планирования, макроэкономического анализа и статистики финансов. E-mail: saradionov@edu.hse.ru

**Языков Артем Анатольевич** – аспирант Департамента прикладной экономики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ), ассистент кафедры математического моделирования сложных систем и оптимизации Московского физико-технического института (государственного университета); м.н.с. ФИЦ ИУ РАН. E-mail: artem.yazykov@yandex.ru

Статья поступила: 24.07.2018/Статья принята: 20.09.2018.

нозов, строит прогнозы несколько лучше, чем ARIMAX и значительно лучше, чем AR, ARIMA, VAR, VARX. Показано также, что при поиске параметров модели методом многошаговых прогнозов оптимальные значения оказываются примерно одинаковыми для разных интервалов оценивания и для разных длин прогноза (от одного до шести месяцев). Такая устойчивость параметров дает нам основания считать, что модель воспроизводит долгосрочные соотношения модельных переменных и может быть использована для прогнозирования и сценарного анализа.

Модель может быть использована для оценки реакции банковской системы на проводимую денежно-кредитную политику, различные внешние ограничения и общее состояние экономики, а также как блок более общей модели общего равновесия экономики России.

**Ключевые слова:** банковская система; кредиты; депозиты; ликвидность; расчетные счета; прогнозирование; обязательные резервы.

**DOI:** 10.17323/1813-8691-2018-22-3-418-447

## 1. Введение

Финансовый кризис 2007 г. стал мощным стимулом для развития макроэкономических моделей, в которых существенную роль играет банковский сектор. Широко используемые более ранние работы, такие, например, как [Bernanke, Gertler, 1989; Bernanke, Gertler, Gilchrist, 1999; Carlstrom, Fuerst, 1997; Kiyotaki, Moore, 1997], слишком упрощают описание банковской системы. В результате модели, приведенные в этих работах, оказались неспособны описать кризисные явления, произошедшие в американской экономике. Более того, сформировалось мнение, что в макроэкономической теории нет инструментов для тщательного анализа состояния банковской системы и ее влияния на остальную экономику.

Этот пробел был быстро восполнен такими работами как, например, [Brunnermeier, Sannikov, 2014; Gertler, Karadi, 2011; Gertler, Kiyotaki, 2010; Gertler, Kiyotaki, Queralto, 2012; He, Krishnamurthy, 2012]. В моделях, описанных в этих работах, банковская система может подвергаться различным шокам (изменение стоимости активов, возросшие риски, нестандартные действия регулятора) и, что важно, усиливать их и распространять по остальной экономике. Тем не менее на данный момент вряд ли можно говорить о модели, достаточно полно описывающей процессы, происходящие в банковской системе и успешно воспроизводящей ее динамику.

Российской банковской системе посвящено не так много научных работ такого плана. В работах [Fungačova, Solanko, 2010; Fungačova, Solanko, Weill, 2011] анализируются конкурентность этой отрасли и интенсивность взаимодействия между банками. Более актуальный обзор российской банковской системы с акцентом на ее устойчивость и уровень регионального развития представлен в статье [Журавлева, Леонов, 2015]. В исследовании [Дубинин, 2015] обсуждается поведение банковской системы в ходе кризисов, анализируются предпринятые Центральным Банком меры поддержки. В работе [Мамо-

нов, 2017] представлены результаты эконометрического моделирования рынка кредитов, выдаваемых российскими банками населению. В статье [Малахов, Пильник, Радионов, 2015] показано, что распределения банков по объемам ключевых финансовых агрегатов (суммарные активы, кредиты, депозиты и т.д.) достаточно устойчивы по времени. Это можно считать косвенным свидетельством применимости концепции агрегированного макроагента к описанию российской банковской системы, как сделано в настоящей статье.

Работы, касающиеся российской банковской системы, посвящены исследованию вопросов эффективности банков ([Belousova, Karminsky, Kozug, 2018; Mamonov, Vernikov, 2017; Алескеров и др., 2010]), прогнозированию рейтингов и вероятности их дефолтов или отзыва лицензий ([Khankov Penikas, 2015; Karminsky, Kostrov, 2014; Mamonov, Pestova, Solntsev, 2012]), анализу практики регулирования банковской системы ([Комиссарова, Пеникас, 2013; Penikas, Andrievskaya, 2012]), исследованию степени конкурентности банковской среды ([Мамонов, 2010]). Вопросы моделирования также затрагиваются в работах, посвященных анализу факторов, влияющих на прибыльность банков и другие финансовые показатели ([Belousova, Karminsky, Kozug, 2018; Мамонов, 2011]), и моделированию рынка межбанковского кредитования ([Andrievskaya, Semenova, 2015; Леонидов, Румянцев, 2013]). Сравнение банковской системы России с банковскими системами других стран можно найти в работах [Столбов и др., 2018; Мамонов и др., 2017].

Целью настоящей работы является создание инструмента, способного количественно оценить реакцию российской банковской системы в терминах основных показателей ее деятельности на изменения в остальной экономике (в том числе связанные с внешними ограничениями в период санкций), а также проводимую Банком России денежно-кредитную политику. При этом на характеристики этого инструмента накладываются дополнительные требования по точности прогноза, детальности описания банковской деятельности и учету сложившихся в экономике правил ее функционирования. Создание такого инструмента позволило бы более точно прогнозировать эффекты от возникновения внешних и внутренних ограничений деятельности банковской системы и способствовало бы разработке мер политики по их компенсации. Таким образом, в отличие от вышеприведенных работ, посвященных в основном функционированию отдельных банков, мы рассматриваем банковскую систему в целом и исследуем ее реакцию на изменение макроэкономических условий на агрегированном уровне.

Более ранние модели российской банковской системы, схожие с точки зрения используемого подхода с представленной в данной статье, можно видеть в работах [Андреев, Пильник, Поспелов, 2009а; 2009б; Пильник, Радионов, 2017]. В первых двух работах сформулирована модель российской банковской системы в достаточно агрегированных переменных, а также исследованы свойства решения, полученного в рамках этой модели. Наибольшее внимание уделяется так называемому магистральному свойству. В третьей работе представлен подход к оценке параметров модели, который ранее, насколько нам известно, использовался только в эконометрических моделях – многошаговый прогноз (*multi-step forecasting*). В рамках этого подхода параметры модели выбираются так, чтобы минимизировать функционал ошибок out-of-sample прогноза на заданное число шагов.

Следует заметить, что представленная в работе модель сконструирована таким образом, чтобы она могла быть встроена в модель общего равновесия. В этом смысле наиболее близкой работой является [Benes, Kumhof, 2011], посвященная описанию DSGE-

модели Международного валютного фонда с нетривиальным банковским сектором. В рамках этой модели банки максимизируют свое богатство, выбирая оптимальные кредитные контракты, которые они предлагают агентам-производителям. В эти контракты закладывается риск – кредит может не быть возвращен. Банки подвергаются государственному регулированию в духе Базельских соглашений – в случае недостаточности капитала они выплачивают штраф. В модели, однако, нет потребности в банковской ликвидности и многих других механизмов, существующих в реальной экономике.

В настоящей статье банк может не только кредитовать производителей, как в работе [Андреев, Пильник, Поспелов, 2013], но также может выдавать кредиты и домашним хозяйствам, а также может принимать депозиты обоим, причем по разным ставкам. Кредиты и депозиты могут номинироваться как в национальной валюте (российских рублях), так и в иностранной (доллары США). Банк функционирует в условиях ограниченной рублевой и валютной ликвидности и обязан сохранить определенный уровень обязательных резервов.

Работа имеет следующую структуру. Во втором разделе предложено теоретическое описание задачи макроэкономического агента «банк», а также обсуждаются основные этапы решения этой задачи и ее преобразования к виду, удобному для использования вместе со статистическими данными. В третьем разделе рассматриваются использованные в качестве базы для сравнения эконометрические модели, а также приведено описание используемых методов оценки параметров модели, полученные оценки коэффициентов и характеристика точности при прогнозировании.

В качестве новизны данной работы следует отметить три момента. Во-первых, мы применяем в модели новую методику смягчения условий дополняющей нежесткости и приводим ее интерпретацию. Во-вторых, мы рассматриваем более широкий по сравнению с предыдущими версиями модели набор макроэкономических переменных, траектории которых успешно воспроизводятся нашей моделью. В-третьих, мы проводим сравнение двух методов идентификации модели и стандартных эконометрических методов. В статье показано, что набор параметров, полученных с помощью многошагового метода прогнозирования, предложенный в работе [Пильник, Радионов, 2017], гораздо более устойчив в смысле, обсуждаемом ниже, чем те, которые получены с помощью стандартной методики идентификации параметров динамических моделей. Эконометрические модели, такие как AR, ARIMA, VAR, VARX, дают прогнозы намного хуже, чем вышеупомянутые методы и, по нашему мнению, не могут использоваться для анализа государственной политики. Модели ARIMAX с правильно подобранными экзогенными переменными показывают сравнимую точность, но все-таки проигрывают по большей части прогнозируемых переменных.

## **2. Описание оптимизационной задачи банка**

### **2.1. Постановка задачи банка**

При описании поведения банковской системы мы рассматриваем ее как единого агента. В конце данного раздела задача банка будет сведена к обычной динамической системе, которая определяет спрос агрегированного банка на депозиты и предложение кредитов в зависимости от его текущего состояния, а также процентных ставок и других внешних факторов на рынке.

Рассмотрим банк, который к моменту  $t$  выдал кредиты населению в рублях в размере  $Lh(t)$ . Средние сроки, на которые выдаются кредиты, обозначим через  $1/\beta_{lh}(t)$ . Саму переменную  $\beta_{lh}(t)$  далее мы будем трактовать как средние частоты возвратов кредитов. Тогда процесс изменения кредитов (остатков) описывается уравнением

$$(1) \quad \frac{d}{dt}Lh(t) = Kh(t) - \beta_{lh}(t)Lh(t),$$

где переменная

$$(2) \quad Kh(t) \geq 0$$

описывает потоки вновь выданных кредитов населению. Заметим, что во всех приведенных далее формулах, если не оговорено иное, считается, что соотношение справедливо для любого момента времени на отрезке  $[t_0, T]$ . Считаем, что по выданным кредитам банк получает процентные платежи  $r_{lh}(t)Lh(t)$ , где  $r_{lh}(t)$  – эффективная ставка процента по кредитам населению.

Пусть также к моменту  $t$  банк привлек депозиты населения в рублях в размере  $Sh(t)$ . Средние сроки, на которые привлекаются депозиты, обозначим через  $1/\beta_{sh}(t)$ , а переменную  $\beta_{sh}(t)$  далее мы будем трактовать как средние частоты изъятия депозитов. Тогда процесс изменения депозитов (остатков) описывается уравнениями

$$(3) \quad \frac{d}{dt}Sh(t) = Vh(t) - \beta_{sh}(t)Sh(t),$$

где переменная

$$(4) \quad Vh(t) \geq 0$$

описывает потоки вновь привлеченных депозитов населения. По привлеченным депозитам банк выплачивает процентные платежи  $r_{sh}(t)Sh(t)$ , где  $r_{sh}(t)$  – эффективная ставка процента по депозитам.

Аналогичным образом банк взаимодействует с фирмами, выдавая им кредиты и привлекают у них депозиты в рублях. Эти процессы описываются уравнениями

$$(5) \quad \frac{d}{dt}La(t) = Ka(t) - \beta_{la}(t)La(t), \quad \frac{d}{dt}Sa(t) = Va(t) - \beta_{sa}(t)Sa(t),$$

где  $Ka(t) \geq 0$  описывает потоки вновь выданных кредитов фирмам;  $Va(t) \geq 0$  – потоки вновь привлеченных депозитов фирм. Переменными  $\beta_{la}(t)$  и  $\beta_{sa}(t)$  описываются частоты возвратов кредитов и депозитов фирм. Процентные платежи осуществляются согласно эффективным процентным ставкам  $r_{la}(t)$  и  $r_{sa}(t)$ .

Кроме операций в рублях банк проводит и операции в валюте. Для описания этих процессов в модели дублируется описание кредитов и депозитов населению и фирмам,

приведенное выше, но к каждой переменной добавляется префикс «v», что указывает на то, что эта переменная номинирована в долларах. Уравнения для описания валютных операций выглядят следующим образом:

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} vLh(t) &= vKh(t) - \beta_{vLh}(t) vLh(t), \\ \frac{d}{dt} vLa(t) &= vKa(t) - \beta_{vLa}(t) vLa(t), \\ \frac{d}{dt} vSh(t) &= vVh(t) - \beta_{vSh}(t) vSh(t), \end{aligned}$$

$$(7) \quad \frac{d}{dt} vSa(t) = vVa(t) - \beta_{vSa}(t) vSa(t).$$

Далее для сопоставления переменных, номинированных в разных валютах, в модели будет использован валютный курс  $w_w(t)$ . Процентные платежи в долларах осуществляются согласно эффективным процентным ставкам  $r_{vLh}(t)$ ,  $r_{vSh}(t)$ ,  $r_{vLa}(t)$  и  $r_{vSa}(t)$ .

Кроме депозитов населения и фирм банк привлекает еще и средства в виде беспроцентных остатков расчетных счетов  $N(t)$ . Для величины этих остатков нет регулирующей величины типа процента, и банк должен просто ориентироваться на предложение со стороны клиентов. Поэтому эту величину считаем ограниченной экзогенно (банк может взять меньше предложенного, но не больше). Таким образом,

$$N(t) \leq N_n(t),$$

где  $N_n(t)$  – известное банку предложение остатков расчетных счетов.

Аналогичная логика использована для описания двух других внешних для банка источников средств: депозитов Центрального Банка, вложенных им в банковскую систему,  $Sc(t)$  (в рублях), и депозитов иностранных организаций, привлеченных банком из-за границы,  $vSf(t)$  (в долларах).

$$Sc(t) \leq Sc_{sc}(t), \quad vSf(t) \leq vSf_{vsf}(t).$$

Три введенные выше переменные,  $N_n(t)$ ,  $Sc_{sc}(t)$ ,  $vSf_{vsf}(t)$ , фактически описывают состояние остальных агентов экономики, которые взаимодействуют с банком. Расчетные счета характеризуют экономическую активность домохозяйств и фирм, депозиты Центрального Банка описывают проводимую им кредитно-денежную политику (объем средств, вложенных в банковскую систему), а депозиты иностранных организаций – интенсивность взаимодействия с внешним миром. Эти переменные становятся особенно важными при описании в модели кризисных явлений 2014–2015 гг. и появившихся

внешних ограничений в виде различных санкций. Выплачиваемые по депозитам ЦБ и иностранных организаций проценты формируются согласно ставкам  $r_{sc}(t)$  и  $r_{vsf}(t)$ .

Имеющиеся у банка ликвидные активы в рублях,  $A(t)$ , и валюте,  $vA(t)$ , в рамках модели используются для проведения операций соответственно с рублевыми и валютными кредитами и депозитами. Интенсивность использования ликвидных активов в каждой операции описывается с помощью коэффициентов  $\tau$  с соответствующими индексами:

$$(8) \quad \begin{aligned} A(t) &\geq \tau_{sh}Sh(t) + \tau_{sa}Sa(t) + \tau_{lh}Lh(t) + \tau_{la}La(t), \\ vA(t) &\geq \tau_{vsh}vSh(t) + \tau_{vsa}vSa(t) + \tau_{vsf}vSf(t) + \tau_{vlh}vLh(t) + \tau_{vla}vLa(t). \end{aligned}$$

Деятельность банка по привлечению депозитов ограничена резервным требованием, обязывающим банк держать часть привлеченных средств на счетах в ЦБ. В модели данное требование записывается в виде

$$(9) \quad \begin{aligned} Rc(t) &\geq n_s(t)(Sh(t) + Sa(t)) + \\ &+ n_{vs}(t)w_w(t)(vSh(t) + vSa(t) + vSf(t)), \end{aligned}$$

где  $n_s(t)$  и  $n_{vs}(t)$  – нормы резервирования для рублевых и валютных депозитов.

Учитывая все указанные выше операции может быть выписан финансовый баланс банка:

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}A(t) &= -Kh(t) + (\beta_{lh}(t) + r_h(t))Lh(t) - Ka(t) + (\beta_{la}(t) + r_{la}(t))La(t) + \\ &+ w_w(t)(-vKh(t) + (\beta_{vlh}(t) + r_{vlh}(t))vLh(t) - vKa(t) + (\beta_{vla}(t) + r_{vla}(t))vLa(t)) + \\ &+ Vh(t) - (\beta_{sh}(t) + r_{sh}(t))Sh(t) + Va(t) - (\beta_{sa}(t) + r_{sa}(t))Sa(t) + \\ &+ w_w(t)(vVh(t) - (\beta_{vsh}(t) + r_{vsh}(t))vSh(t) + vVa(t) - (\beta_{vsa}(t) + r_{vsa}(t))vSa(t)) + \\ &+ \frac{d}{dt}Sc(t) - r_{sc}(t)Sc(t) + w_w(t)\left(\frac{d}{dt}vSf(t) - r_{vsf}(t)vSf(t)\right) + \\ &+ \frac{d}{dt}N(t) - w_w(t)\left(\frac{d}{dt}vA(t)\right) - \frac{d}{dt}Rc(t) - OC_o(t) - Z(t). \end{aligned}$$

Поток  $OC_o(t)$  включает налоговые платежи, инвестиции в основные фонды (включая участие в собственности), а также операционные расходы. Эти потоки (кроме, может быть, налогов) не связаны напрямую с активами и пассивами банка, и мы попытаемся построить модель, не вдаваясь в подробное описание структуры потока  $OC_o(t)$ .

Вышеприведенные соотношения представляют собой ограничения, наложенные в рамках модели на возможности банка выбирать значения своих планируемых переменных (управлений):

$$(11) \quad \begin{aligned} &Kh(t), Lh(t), Ka(t), La(t), Vh(t), Sh(t), Va(t), Sa(t), \\ &vKh(t), vLh(t), vKa(t), vLa(t), vVh(t), vSh(t), vVa(t), vSa(t), \\ &Sc(t), Sf(t), Z(t), N(t), Rc(t), A(t), vA(t). \end{aligned}$$

Согласно принципу рациональных ожиданий, лежащему в основе моделей межвременного равновесия, при планировании своих управляющих переменных банк может рассчитывать на точный прогноз информационных переменных:

$$(12) \quad \begin{aligned} &\beta_{lh}(t), \beta_{sh}(t), \beta_{la}(t), \beta_{sa}(t), \beta_{vlh}(t), \beta_{vsh}(t), \beta_{vla}(t), \beta_{vsa}(t), \\ &r_{lh}(t), r_{sh}(t), r_{la}(t), r_{sa}(t), r_{sc}(t), \\ &r_{vlh}(t), r_{vsh}(t), r_{vla}(t), r_{vsa}(t), r_{vsf}(t), \\ &n_s(t), n_{vs}(t), N_n(t), OC_o(t), Sc_{sc}(t), Sf_{sf}(t), w_w(t). \end{aligned}$$

Банк максимизирует ожидаемую дисконтированную полезность потока  $Z(t)$  с учетом заданного дефлятора  $\zeta_{liq}(t)$ :

$$\int_{t_0}^T \frac{e^{-\Delta t}}{1-\eta} \left( \frac{Z(t)}{\zeta_{liq}(t)} \right)^{1-\eta} dt$$

по переменным (11) при ограничениях (1)–(10) на некотором интервале  $[t_0, T]$ , заданных в начальный момент значениях фазовых переменных и заданных траекториях изменения экзогенных величин (12). Мы будем трактовать этот поток как извлекаемую из банковской деятельности прибыль, которую банк стремится максимизировать.

Для разрешимости задачи ограничения надо дополнить терминальными условиями, которые, как показано в [Пильник, Поспелов, 2007], естественно задавать как условия роста суммы фазовых переменных

$$(13) \quad \begin{aligned} &A(T) + Lh(T) + La(T) - Sh(T) - Sa(T) - N(T) + Rc(T) - Sc(T) + \\ &+ w_w(T)(vA(T) + vLh(T) + vLa(T) - vSh(T) - vSa(T) - vSf(T)) \geq \\ &\geq \gamma(A(t_0) + Lh(t_0) + La(t_0) - Sh(t_0) - Sa(t_0) - N(t_0) + Rc(t_0) - Sc(t_0) + \\ &+ w_w(t_0)(vA(t_0) + vLh(t_0) + vLa(t_0) - vSh(t_0) - vSa(t_0) - vSf(t_0))). \end{aligned}$$

Подробнее условия такого рода проанализированы в [Пильник, Поспелов, 2007].

## 2.2. Решение задачи банка

Сформулированная задача относится к весьма сложному классу задач оптимального управления – это линейная неавтономная задача со смешанными ограничениями. Да-

лее мы опишем основные этапы нахождения и преобразования ее решения. Каждому из ограничений ставится в соответствие двойственная переменная (неотрицательная – неравенству и закононеопределенная – равенству), составляется функционал Лагранжа и записываются условия его седловой точки, которые представляют собой систему достаточных условий оптимальности. Эти условия делятся на четыре группы:

- 1) исходные дифференциальные уравнения (начальные условия для них считаются заданными);
- 2) сопряженные дифференциальные уравнения для переменных, двойственных к исходным дифференциальным уравнениям;
- 3) условия трансверсальности, которые определяют терминальные условия для сопряженных дифференциальных уравнений;
- 4) условия дополняющей нежесткости для неравенств. В общем случае эти ограничения состоят из трех соотношений

$$\lambda(t)X(t) = 0, \quad X(t) \geq 0, \quad \lambda(t) \geq 0,$$

где  $X(t)$  – выражение из прямых переменных, входящих в исходное неравенство, а  $\lambda(t)$  – двойственная переменная к этому неравенству. Далее для удобства систему таких условий мы будем обозначать  $[\lambda(t)][X(t)]$ .

Рассмотрим технику работы с системой достаточных условий, полученных после преобразования вариаций функционала Лагранжа по прямым переменным задачи на примере уравнений для переменных, описывающих взаимодействие банка с потребителем (условия для взаимодействия с фирмой выглядят аналогично). Начать следует с упомянутых выше условий дополняющей нежесткости, полученных из неравенств на положительность новых привлеченных депозитов (2) и выданных кредитов (4) в рублях и валюте. Этот набор условий выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} (14) \quad & [\Phi 2(t)\xi(t)][Kh(t)], \\ & [\Phi 4(t)\xi(t)w_w(t)][vKh(t)], \\ & [\Phi 6(t)\xi(t)][Vh(t)], \\ (15) \quad & [\Phi 8(t)\xi(t)w_w(t)][vVh(t)]. \end{aligned}$$

В данном случае  $\Phi 2(t), \Phi 4(t), \Phi 6(t), \Phi 8(t)$  – нормированные двойственные переменные к соответствующим неравенствам. В качестве нормировки выступают остальные множители, присутствующие в первой скобке каждого из четырех условий, где  $\xi(t)$  – двойственная переменная к финансовому балансу.

Следует отметить, что динамика двойственной переменной  $\xi(t)$  оказывается крайне важна для описания оптимального поведения банка, но для удобства в приведенных далее соотношениях будет использоваться замена

$$\rho(t) = -\frac{d}{dt} \xi(t).$$

Темп падения двойственной переменной к финансовому балансу  $\rho(t)$ , как показано в работе [Андреев, Пильник, Поспелов, 2013], можно трактовать как доходность агента.

Преобразование вариаций функционала Лагранжа по запасам  $Lh(t), vLh(t), Sh(t), vSh(t)$  и потокам  $Kh(t), vKh(t), Vh(t), vVh(t)$  позволяет получить дифференциальные уравнения на двойственные переменные  $\Phi 2(t), \Phi 4(t), \Phi 6(t), \Phi 8(t)$ , которые можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 (16) \quad \frac{d}{dt} \Phi 2(t) &= (\rho(t) + \beta_{lh}(t)) \Phi 2(t) - (1 - \tau_{lh}) \rho(t) + r_{lh}(t), \\
 \frac{d}{dt} \Phi 4(t) &= \left( \rho(t) + \beta_{vlh}(t) - \frac{\frac{d}{dt} w_w(t)}{w_w(t)} \right) \Phi 4(t) - \\
 &\quad - (1 + \tau_{vlh}) \rho(t) + r_{vlh}(t) + (1 + \tau_{vlh}) \frac{\frac{d}{dt} w_w(t)}{w_w(t)}, \\
 \frac{d}{dt} \Phi 6(t) &= (\rho(t) + \beta_{sh}(t)) \Phi 6(t) + (1 - n_s(t) - \tau_{sh}) \rho(t) - r_{sh}(t), \\
 \frac{d}{dt} \Phi 8(t) &= \left( \rho(t) + \beta_{vsh}(t) - \frac{\frac{d}{dt} w_w(t)}{w_w(t)} \right) \Phi 8(t) + \\
 (17) \quad &\quad + (1 - \tau_{vsh} - n_{vsh}(t)) \rho(t) - r_{vsh}(t) - (1 - \tau_{vsh}) \frac{\frac{d}{dt} w_w(t)}{w_w(t)}.
 \end{aligned}$$

Вариация функционала Лагранжа по переменной  $Z(t)$  позволяет получить дифференциальное уравнение на эту переменную

$$(18) \quad \frac{d}{dt} Z(t) = \left( \frac{\rho(t) - \Delta}{\eta} + \frac{\eta - 1}{\eta} \frac{\frac{d}{dt} \zeta_{liq}(t)}{\zeta_{liq}(t)} \right) Z(t).$$

Соотношения (14)–(18), ограничения на прямые переменные (1), (3), (5)–(7) и (10), а также выполненные как равенства условия (8)–(9) вместе с условиями на конечные значения двойственных переменных, получаемые при вариации функционала Лагранжа по фазовым переменным в момент  $T$ , полностью описывают решение задачи оптимального поведения банка.

### 2.3. Преобразование решения задачи банка

Следует отметить, что в дополнение к стандартным методам, предназначенным для решения таких задач, мы также используем и специальные методы, разработанные для перехода от задач в непрерывном времени, подобных той, которая была рассмотрена выше, к задачам в дискретном времени, которые могут быть использованы для соотнесения со статистическими данными.

На первом этапе мы преобразовываем дифференциальные уравнения для двойственных переменных (16)–(17), пользуясь их свойствами. Дело в том, что все эти уравнения оказываются сильно неустойчивыми в прямом времени, поэтому большую (а на самом деле подавляющую при реально наблюдаемых ставках и дюрациях) часть интервала  $[t_0, T]$  решение каждого из них проводят вокруг сепаратрисы, резко отклоняясь от нее в конце таким образом, чтобы выполнить свое терминальное условие. Это свойство решения называется магистральным и подробно описано, например, в [Андреев, Пильник, Поспелов, 2009b]. Воспользовавшись им, мы можем приблизить дифференциальные уравнения (16)–(17) следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
 (19) \quad \Phi 2(t) &= \frac{(1 - \tau_{lh})\rho(t) - r_{lh}(t)}{\rho(t) + \beta_{lh}(t)}, \\
 \Phi 4(t) &= \frac{(1 + \tau_{vlh})\rho(t) - r_{vlh}(t) - (1 + \tau_{vlh}) \frac{d}{dt} w_w(t)}{\rho(t) + \beta_{vlh}(t) - \frac{d}{dt} w_w(t)}, \\
 \Phi 6(t) &= \frac{r_{sh}(t) - (1 - n_s(t) - \tau_{sh})\rho(t)}{\rho(t) + \beta_{sh}(t)}, \\
 (20) \quad \Phi 8(t) &= \frac{r_{vsh}(t) - (1 - \tau_{vsh} - n_{vs}(t))\rho(t) + (1 - \tau_{vsh}) \frac{d}{dt} w_w(t)}{\rho(t) + \beta_{vsh}(t) - \frac{d}{dt} w_w(t)}.
 \end{aligned}$$

Отметим, что, перейдя к приведенным выше четырем соотношениям для двойственных переменных, мы фактически избавились от стандартного для двойственных переменных влияния будущего (терминальных условий, определяющих их значение в момент времени  $T$ ) на прошлое (всю траекторию до этого последнего момента). Терминальное условие (13) обеспечивает разрешимость исходной задачи и как раз и позволяет получить значения двойственных переменных в момент времени  $T$ . Именно поэтому

сами терминальные условия нас далее интересовать не будут, поскольку влияют только в течение крайне малого отрезка времени перед моментом  $T$ .

С точки зрения использования моделей такого рода в прикладных расчетах следует учитывать, что даже для экзогенных переменных мы не видим в статистике всей траектории. Статистические данные принципиально дискретны и рассчитываются с определенной частотой: месяц, квартал, год и так далее, т.е. либо в среднем за этот период, либо используются значения, соответствующие его концу. Для того чтобы адаптировать модель к данным такого типа, используется процедура дискретизации – переход к дискретному времени (подробнее см.: [Васильев, Пильник, Радионов, 2018]). Будем считать, что, хотя банк действует согласно своей оптимизационной задаче в непрерывном времени на интервале  $[t_0, T]$ , мы имеем возможность наблюдать его в дискретные моменты.

Следует отметить, что этот прием является одним из наиболее важных при построении модели оптимизационного типа. Если изначально писать модель в дискретном времени, то условия дополняющей нежесткости (14)–(15) придется разрешать единым образом: прямые переменные, входящие в правую скобку, мы будем вынуждены все время считать большими нуля, а двойственные переменные, входящие в левую скобку, считать равными нулю. Последнее в силу соотношений (19)–(20) приведет к появлению в модели жестких соотношений между ставками, которые, вообще говоря, не соответствуют тому, что наблюдается в статистических данных.

Но и отказываться от этих соотношений некорректно как с математической точки зрения, нарушая тем самым равенство между количеством уравнений и количеством эндогенных переменных, так и с содержательной. Двойственные переменные  $\Phi_2(t), \Phi_4(t),$

$\Phi_6(t), \Phi_8(t)$  не просто учитывают влияние отдельных процентных ставок, входящих в их соотношения (19)–(20), но и связывают эти эффекты внутри всей модели через переменную  $\rho(t)$ . Это позволяет в рамках модели описывать не только прямые эффекты от влияния ставок (например, изменение ставки по рублевым кредитам населению на объем выданных рублевых кредитов населению), но и перекрестное влияние: в рамках описываемой модели учитываются зависимости всех эндогенных переменных от всех экзогенных переменных (что, в принципе, типично для моделей общего равновесия), причем в процессе вывода системы уравнений, описывающей условия оптимальности, определяется тип функциональной формы для каждой такой зависимости. Получить такие зависимости в рамках эконометрических моделей, как нам представляется, крайне сложно, поскольку, во-первых, в этом случае функциональную форму приходится фактически угадывать (возможности тестирования хоть и существуют, но представляются весьма ограниченными), а во-вторых, учесть влияние всех экзогенных переменных даже на одну эндогенную переменную фактически невозможно – число оцениваемых коэффициентов оказывается критически велико для имеющегося массива данных.

Далее каждому показателю в непрерывном времени мы будем ставить в соответствие показатель в дискретном времени. В рамках этого подхода каждый дифференциал может быть заменен на разность текущего и предыдущего значения:

$$\frac{d}{dt} X(t) = X(t) - X(t-1),$$

но при этом сама переменная  $X(t)$ , встречающаяся в этих же уравнениях без дифференциала, должна быть заменена на ее значение в предыдущий момент времени. Результат применения этой техники удобно показать на примере баланса рублевых кредитов, выданных населению (1), который следует записать в виде

$$(21) \quad Lh(t) - Lh(t-1) = Kh(t) - \beta_{lh}(t)Lh(t-1).$$

Балансы (3), (5)–(7) следует переписать аналогичным образом. Тогда финансовый баланс (10) следует переписать в виде

$$(22) \quad \begin{aligned} A(t) - A(t-1) = & -Kh(t) + (\beta_{lh}(t) + r_{lh}(t))Lh(t-1) - \\ & -Ka(t) + (\beta_{la}(t) + r_{la}(t))La(t-1) + \\ & + w_w(t)(-vKh(t) + (\beta_{vlh}(t) + r_{vlh}(t))vLh(t-1)) + \\ & + w_w(t)(-vKa(t) + (\beta_{vla}(t) + r_{vla}(t))vLa(t-1)) + \\ & + Vh(t) - (\beta_{sh}(t) + r_{sh}(t))Sh(t-1) + Va(t) - (\beta_{sa}(t) + r_{sa}(t))Sa(t-1) + \\ & + w_w(t)(vVh(t) - (\beta_{vsh}(t) + r_{vsh}(t))vSh(t-1)) + \\ & + w_w(t)(vVa(t) - (\beta_{vsa}(t) + r_{vsa}(t))vSa(t-1)) + \\ & + Sc(t) - Sc(t-1) - r_{sc}(t)Sc(t-1) + N_n(t) - N_n(t-1) - Rc(t) + Rc(t-1) + \\ & + w_w(t)(-vA(t) + vA(t-1) + vSc(t) - vSc(t-1) - r_{vsc}(t)vSc(t-1)) - \\ & - OC_o(t) - Z(t). \end{aligned}$$

Записанные как равенства выражения (8)–(9), поскольку они не содержат дифференциалов, следует записать в виде

$$\begin{aligned} A(t) &= \tau_{sh}Sh(t) + \tau_{sa}Sa(t) + \tau_{lh}Lh(t) + \tau_{la}La(t) + d1Seas(t), \\ vA(t) &= \tau_{vsh}vSh(t) + \tau_{vsa}vSa(t) + \tau_{vsf}vSf(t) + \tau_{vlh}vLh(t) + \tau_{vla}vLa(t), \\ Rc(t) &= n_s(t)(Sh(t) + Sa(t)) + n_{vs}(t)w_w(t)(vSh(t) + vSa(t) + vSf(t)). \end{aligned}$$

Предварительный анализ данных показал, что в рядах имеется явный сезонный компонент. Такими переменными являются рублевые депозиты населения и фирм и рублевая ликвидность, показывающие четкие пики в конце каждого года. В рамках нашего подхода мы не делаем предварительную корректировку этой сезонности, но вместо этого при необходимости вводим поправку для специальной фиктивной переменной  $Seas(t)$ , которая принимает значения единицы каждый декабрь и равна нулю во всех других точках.

В свою очередь, соотношение (18) может быть записано в виде

$$(23) \quad Z(t) - Z(t-1) = \left( \frac{\rho(t) - \Delta}{\eta} + \frac{\eta - 1}{\eta} \frac{\zeta_{liq}(t) - \zeta_{liq}(t-1)}{\zeta_{liq}(t-1)} \right) Z(t-1).$$

Отдельного обсуждения требуют условия дополняющей нежесткости (14)–(15). Фактически, они являются вырожденными функциональными зависимостями, график которых очерчивает границы первой четверти, и, следовательно, оптимальное решение исследуемой системы «скачет по углам». С экономической точки зрения они описывают бесконечно эластичные функции спроса или предложения агента. Но с точки зрения последующей калибровки модели эти отношения представляют значительную трудность, существенно увеличивая неустойчивость оценок коэффициентов, и, как следствие, построенных с помощью модели прогнозов.

Тем не менее с помощью вполне естественных предположений о переключении режимов, определяемых способом разрешения каждого из условий дополняющей нежесткости, оказывается возможным перейти к более регулярным и удобным с точки зрения калибровки модели соотношениям. Подробнее этот прием исследован в работе [Васильев, Пильник, Радионов, 2018]. Используя полученные ранее выражения для двойственных переменных (19)–(20) и специальные правила их нормировки, для описания зависимости между дискретными переменными добавляются коэффициенты смягчения  $a_i, b_i, c_i, cc_i, cf_i$ , где  $i = 1, \dots, 8$  – индекс соответствующего ему условия дополняющей нежесткости.

Здесь мы снова ограничимся выражениями только для переменных, описывающих взаимодействие банка и населения. Для удобства введем следующие три переменные, описывающие финансовые потоки, связанные с депозитами ЦБ, депозитами иностранных организаций и прочими операциями.

$$Bc(t) = Sc(t) - Sc(t-1) - r_{sc}(t)Sc(t-1),$$

$$Bf(t) = w_w(t)(vSf(t) - vSf(t-1) - r_{vsf}(t)vSf(t-1)),$$

$$B(t) = N_n(t) - N_n(t-1) - OC_o(t) - Z(t).$$

Эти переменные мы будем использовать для описания средств от ЦБ, нерезидентов и прочей экономики в кредитовании и обслуживании депозитов. Тогда смягченные условия дополняющей нежесткости будут иметь вид

$$vVh(t) = \left( -a_1 r_{vsh}(t) + b_1 \beta_{vsh}(t) - ((1 - \tau_{vsh})a_1 + b_1) \frac{w_w(t) - w_w(t-1)}{w_w(t-1)} + \right. \\ \left. + ((1 - n_{vsh}(t) - \tau_{vsh})a_1 + b_1) \rho(t) \right) vSh(t-1) - \frac{c_1 B(t) + cc_1 Bc(t) + cf_1 Bf(t)}{w_w(t)(1 - n_{vsh}(t) - \tau_{vsh})},$$

$$\begin{aligned}
Vh(t) &= \left( -a_2 r_{sh}(t) + b_2 \beta_{sh}(t) + \left( (1 - n_{sh}(t) - \tau_{sh}) a_2 + b_2 \right) \rho(t) \right) Sh(t-1) - \\
&\quad - \frac{c_2 B(t) + cc_2 Bc(t) + cf_2 Bf(t)}{1 - n_{sh}(t) - \tau_{sh}} + d_2 Seas(t) + d_2 Seas(t-1), \\
vKh(t) &= \left( a_3 r_{vth}(t) + b_3 \beta_{vth}(t) + \left( (1 + \tau_{vth}) a_3 - b_3 \right) \frac{w_w(t) - w_w(t-1)}{w_w(t-1)} - \right. \\
&\quad \left. - \left( (1 + \tau_{vth}) a_3 - b_3 \right) \rho(t) \right) vLh(t-1) + \frac{c_3 B(t) + cc_3 Bc(t) + cf_3 Bf(t)}{w_w(t)(1 + \tau_{vth})}, \\
Kh(t) &= \left( a_4 r_{lh}(t) + b_4 \beta_{lh}(t) + \left( -(1 + \tau_{lh}) a_4 + b_4 \right) \rho(t) \right) Lh(t-1) + \\
&\quad + \frac{c_4 B(t) + cc_4 Bc(t) + cf_4 Bf(t)}{\tau_{lh} + 1}.
\end{aligned}$$

Опишем логику взаимосвязи между переменными в полученной динамической системе в момент времени  $t$ . Предположим, что нам полностью известно ее состояние в момент времени  $t-1$  (заданы все переменные из (11)), значения информационных переменных из (12) и все коэффициенты. Кроме того, пока предположим, что мы откуда-то знаем значение доходности  $\rho(t)$ . Тогда из смягченных условий дополняющей нежесткости определятся переменные  $Kh(t), vKh(t), Vh(t), vVh(t)$  и  $Ka(t), vKa(t), Va(t), vVa(t)$ . Тогда из балансов типа (21) можно найти  $Lh(t), vLh(t), Sh(t), vSh(t)$  и  $La(t), vLa(t), Sa(t), vSa(t)$ . Из (23) можно найти  $Z(t)$ . В итоге все неизвестные переменные в момент времени  $t$  из финансового баланса (22) могут быть записаны как функции доходности  $\rho(t)$ , параметров, информационных переменных и переменных в момент времени  $t-1$ . Сама же переменная  $\rho(t)$  после подобных преобразований может быть найдена из финансового баланса (23), который, благодаря выбору формы смягчения условий дополняющих нежесткости, окажется линейным уравнением на нее с единственным решением. В силу громоздкости выражения на  $\rho(t)$  данное уравнение в тексте работы мы не приводим.

Наконец, в конце заметим еще одно свойство рассматриваемой нами системы. При специальном подборе параметров уравнение для  $\rho(t)$  может несколько упроститься из-за того, что часть экзогенных переменных с соответствующими коэффициентами в сумме даст ноль. Поэтому для упрощения проводимых далее расчетов мы будем считать, что

$$\sum_{i=1}^8 c_i = 1, \quad \sum_{i=1}^8 cc_i = 1, \quad \sum_{i=1}^8 cf_i = 1.$$

### 3. Идентификация модели банка

#### 3.1. Описание статистических данных

Основным источником статистических данных, использованных для оценки параметров модели, является форма 101 (оборотная ведомость), который публикуется Банком России ежемесячно с января 2004 г. Она содержит информацию о примерно 1400 счетах около 1200 банков (за весь период наблюдения). С 2007 г. помимо остатков на каждом счете доступны данные об оборотах и разбивка на рублевую и валютную части. В работе использованы эти данные за период с января 2010 г. по январь 2018 г. Мы объединяем эти приблизительно 1400 счетов в 14 базовых агрегатов модели.

Для расчета дюраций кредитов и депозитов также использовалась форма 101, которая предоставляет информацию об их классификации по срокам возврата. Данные о процентных ставках, норме обязательного резервирования и обменном курсе берутся с официального сайта Банка России.

#### 3.2. Эконометрический подход

Эконометрические модели далее нами будут использованы в качестве инструмента для сравнения качества прогнозов рассматриваемой модели. В качестве эконометрических моделей использовалась модель векторной авторегрессии (VAR), интегрированная модель авторегрессии – скользящего среднего (ARIMA), а также расширенные версии этих моделей с использованием экзогенных переменных (ARIMAX, VARX). Для анализа точности моделей выборка разделялась на обучающий и тестовый интервалы. На обучающем интервале выборки оценивались параметры моделей, после чего производился динамический прогноз для тестового интервала выборки, а также рассчитывались метрики близости между прогнозом и тестовой выборкой.

Такой эксперимент проводился для разных обучающих интервалов. Каждый из интервалов начинался в январе 2010 г. и заканчивался в один из месяцев с января 2016 г. по июнь 2017 г. Соответственно прогноз строился для следующих шести месяцев. В качестве меры точности использовалось процентное отклонение прогнозируемого значения ряда от фактического.

Исходя из результатов сравнения эконометрических моделей выяснилось, что модели из класса ARIMAX демонстрируют наибольшую точность прогнозирования с точки зрения средней абсолютной ошибки в процентах (MAPE). Для моделей AR, ARIMA, VAR прогноз оказался хуже, предположительно потому, что они не учитывают информацию, содержащуюся в экзогенных переменных. Однако модель VARX содержала слишком много коэффициентов, что приводит к сильной нестабильности оценок и прогнозов. Поэтому дальнейшее сравнение точности прогнозов будет проводиться только для моделей ARIMAX.

Оценка параметров ARIMAX-модели для каждого ряда проводилось в соответствии со следующей процедурой.

- На первом этапе, используя тест KPSS, для каждого ряда на обучающем интервале выборки был определен порядок интегрирования  $d$ .

• На втором этапе для каждого ряда с порядком интегрирования  $d$  подбирались параметры  $p$  и  $q$  модели  $ARIMA(p,d,q)$ , отвечающие за количество слагаемых авторегрессионной части и за количество слагаемых части скользящего среднего соответственно. Выбор наилучшей спецификации производился путем перебора моделей  $ARIMA(p,d,q)$  с заданными параметрами  $q$  и  $p$ , где  $p = 1, \dots, 5$  и  $q = 1, \dots, 5$ , с последующей сортировкой моделей по информационному критерию Акаике (AIC).

• На третьем этапе для каждого ряда оценивались модель с выбранными параметрами  $q$ ,  $d$  и  $p$ , а также добавленными экзогенными переменными.

Следует отметить, что в отличие от модели VARX, экзогенные переменные для разных рядов различались. Их выбор был сделан на основе содержательного анализа. Для кредитов и депозитов соответствующая продолжительность и процентные ставки использовались в качестве экзогенных переменных. Для валютных переменных также был добавлен обменный курс. Для депозитов и ликвидности была добавлена сезонная компонента. Для рублевых и валютных депозитов учитывалась норма обязательных резервов. Наконец, расчетные счета, депозиты ЦБ и иностранных организаций были добавлены ко всем уравнениям в качестве экзогенных переменных (далее в таблице эта комбинация обозначается как NSS по первым буквам соответствующих модельных переменных).

В представленной далее таблице описываются структуры ARIMA частей для каждой переменной по результатам оценки на интервале до июня 2017 г. (по другим интервалам значения параметров  $p$ ,  $d$  и  $q$  могут, вообще говоря, отличаться). Кроме того, приведен список экзогенных переменных для каждого уравнения. Основная идея выбора независимых переменных состояла в том, чтобы построить эконометрическую модель, опирающуюся на ту же самую информацию, что и модель оптимального поведения банковской системы.

Таблица 1.

## Характеристики эконометрических моделей типа ARIMAX

	$p$	$D$	$q$	Экзогенные переменные					
A	0	1	1	NSS	Seas				
vA	1	1	0	w_w_	NSS				
Rc	0	1	0	n_s_	w_w_	NSS			
La	0	2	1	beta_La	rate_La	NSS			
vLa	2	2	1	beta_vLa	rate_vLa	w_w_	NSS		
Sa	0	1	1	beta_Sa	rate_Sa	n_s_	NSS	Seas	
vSa	0	1	0	beta_vSa	rate_vSa	n_s_	w_w_	NSS	
Lh	0	2	1	beta_Lh	rate_Lh	NSS			
vLh	1	1	1	beta_vLh	rate_vLh	w_w_	NSS		
Sh	2	1	1	beta_Sh	rate_Sh	n_s_	NSS	Seas	
vSh	0	1	0	beta_vSh	rate_vSh	n_s_	w_w_	NSS	

### 3.3. Оценка параметров динамической системы

Стандартным подходом к оценке параметров моделей этого типа является фиксация начальных значений фазовых переменных модели, вычисление при заданных начальных значениях параметров значений переменных во все другие моменты времени согласно выписанной выше динамической системе. После этого начинается постепенный подбор параметров для минимизации определенного критерия качества. В качестве критерия была выбрана сумма квадратов относительных ошибок всех переменных во все моменты времени.

$$\sum_{t=t_0+1}^T \sum_{u \in U} \left( \frac{u(t) - u_{st}(t)}{u_{st}(t)} \right)^2 \rightarrow \min_P,$$

где  $u(t)$  – прогнозное значение для момента времени  $t$ ,  $u_{st}(t)$  – статистическое значение в момент времени  $t$ ,

$$(24) \quad U = \{La, Sa, vLa, vSa, Lh, Sh, vLh, vSh, A, vA, Rc\},$$

где  $U$  – набор переменных, для которых требуется построить прогноз,  $P = \{a_i, b_i, c_i, cc_i, cf_i\}$ , где  $i = 1, \dots, 8$  – набор параметров, которые требуется оценить.

Далее для получения общего представления о качестве воспроизведения моделью происходивших в банковской системе процессов с 2010 по 2018 гг. приведены графики, сопоставляющие фактические значения и модельные оценки основных переменных модели. Следует отметить, что данные графики и сам метод оценки мы используем только в качестве первого приближения и базового тестирования модели. Для построения прогнозов далее этот метод оценки будет скорректирован.

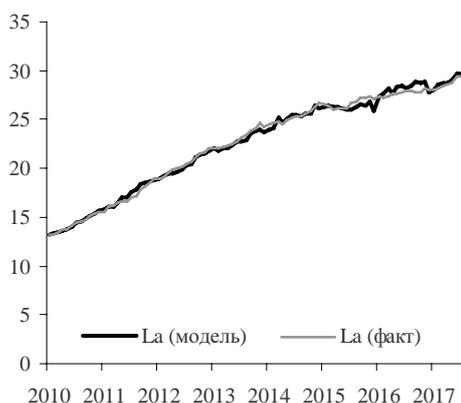


Рис. 1. Фактическое значение и модельная оценка кредитов фирмам, трлн руб.

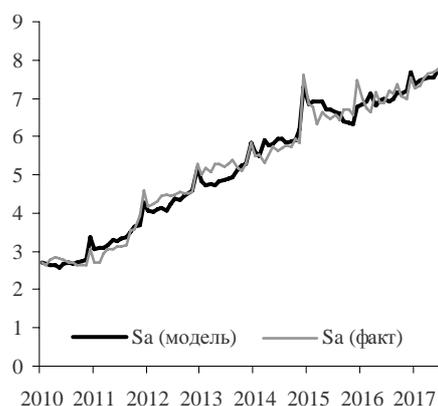
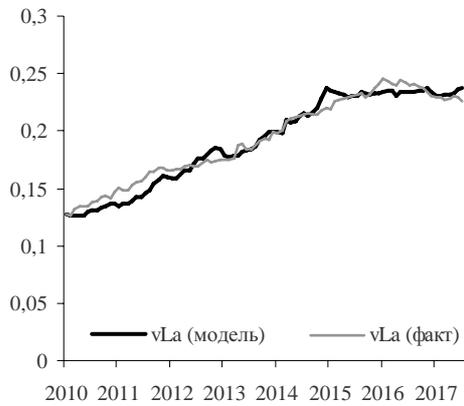
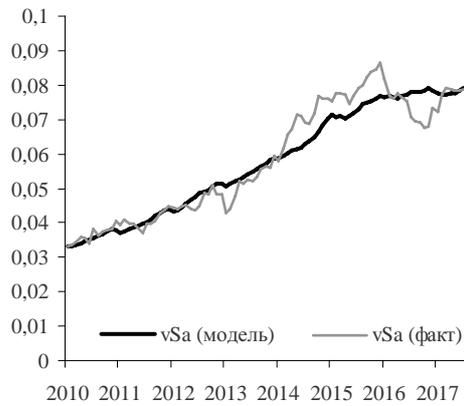


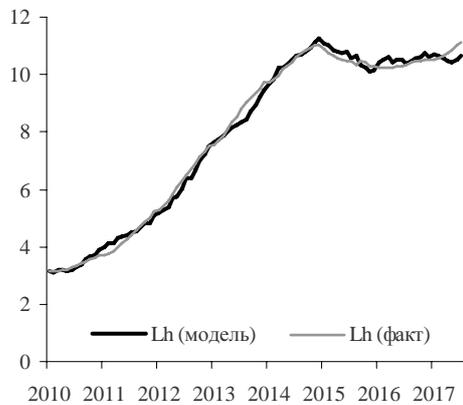
Рис. 2. Фактическое значение и модельная оценка депозитов фирм, трлн руб.



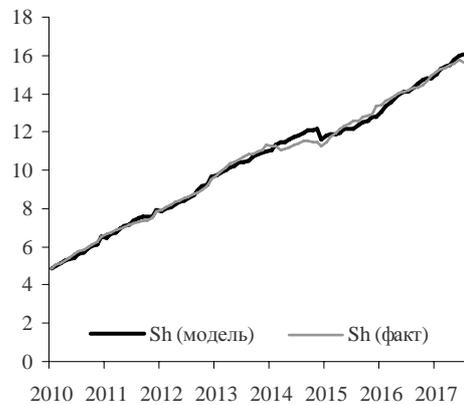
**Рис. 3.** Фактическое значение и модельная оценка кредитов фирмам, трлн долл.



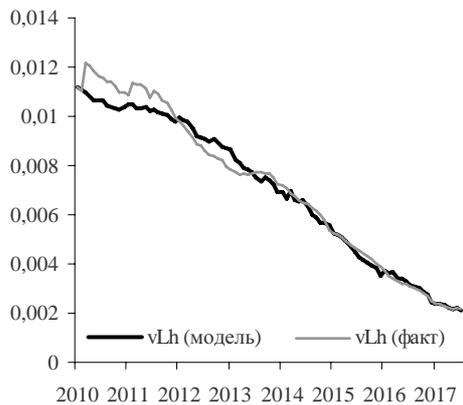
**Рис. 4.** Фактическое значение и модельная оценка депозитов фирм, трлн долл.



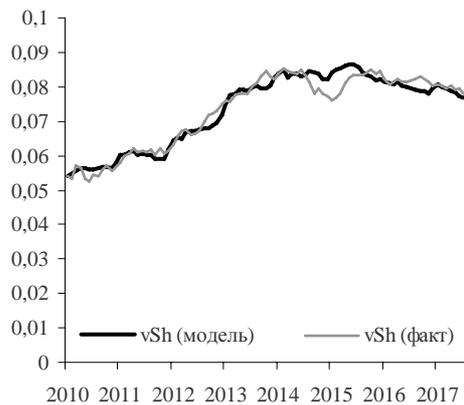
**Рис. 5.** Фактическое значение и модельная оценка кредитов населению, трлн руб.



**Рис. 6.** Фактическое значение и модельная оценка депозитов населения, трлн руб.



**Рис. 7.** Фактическое значение и модельная оценка кредитов населению, трлн долл.



**Рис. 8.** Фактическое значение и модельная оценка депозитов населения, трлн долл.

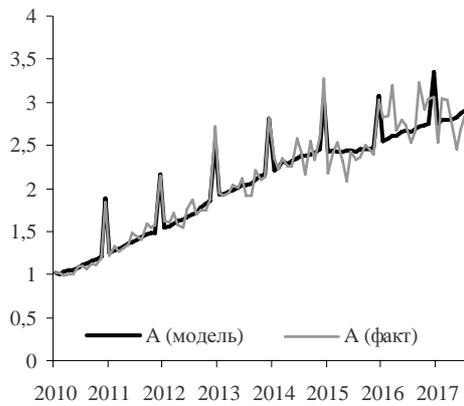


Рис. 9. Фактическое значение и модельная оценка ликвидности, трлн руб.

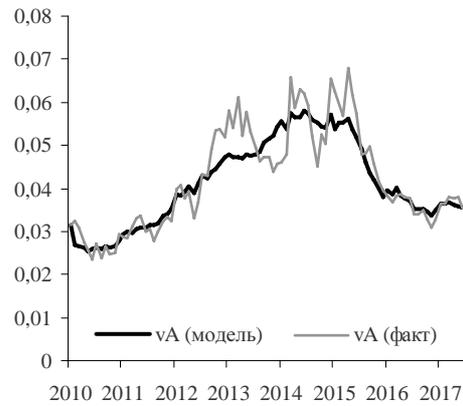


Рис. 10. Фактическое значение и модельная оценка ликвидности, трлн долл.

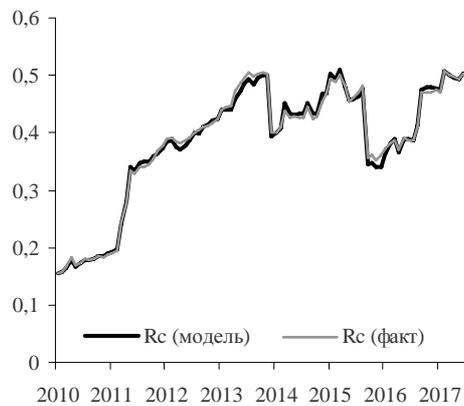


Рис. 11. Фактическое значение и модельная оценка обязательных резервов, трлн руб.

### 3.4. Многоступенчатое прогнозирование

Подход, описанный в предыдущем разделе, хотя и обеспечивает приемлемое качество воспроизведения статистики in-sample, как показали расчеты, дает недостаточно высокую точность прогнозов. Этот раздел посвящен применению другого метода идентификации параметров, предложенного в работе [Пильник, Радионов, 2017]. Суть метода состоит в минимизации функционала ошибок, который представляет собой сумму относительных ошибок прогноза, построенных из каждого момента времени на заданное количество шагов:

$$\sum_{t=t_0}^{T-1} \sum_{\gamma=1}^{\tau^*} \sum_{u \in U} \left( \frac{u(t, t+\gamma) - u_{st}(t+\gamma)}{u_{st}(t+\gamma)} \right)^2 \rightarrow \min_P,$$

где  $\tau^* = \min\{\tau, T - t - 1\}$ ;  $u(t, t + \gamma)$  – прогнозное значение, вычисленное в момент времени  $t$  для момента времени  $t + \gamma$ ;  $u_{st}(t)$  – статистическое значение в момент времени  $t$ ;  $\tau$  – желаемая длина прогноза (мы рассматривали прогноз на 6 месяцев), набор переменных  $U$  совпадает с (24);  $P = \{a_i, b_i, c_i, cc_i, cf_i\}$ , где  $i = 1, \dots, 8$  – набор параметров, которые требуется оценить. Иными словами, поскольку основным назначением модели является построение прогнозов out-of-sample, параметры выбираются таким образом, чтобы обеспечивать наилучшее качество прогнозов на in-sample-данных.

Поиск параметров осуществлялся с помощью программного пакета MATLAB. Поскольку параметры задачи могут принимать любые значения, задача нахождения их оптимального набора сводится к задаче безусловной оптимизации. Она решалась с помощью команды lsqnonlin, являющейся частью Optimization package. Генерация начальных приближений осуществлялась методом Монте-Карло – предполагалось, что компоненты начальной точки равномерно распределены по отрезкам, взятым из априорных соображений об их порядке.

Поиск параметров осуществлялся для различных временных интервалов – все они начинались в январе 2010 г., заканчивались в разных месяцах 2016 и 2017 гг. Замечательный факт состоит в том, что для всех интервалов и всех длин прогноза оптимальный набор параметров получался примерно одним и тем же. Тем самым можно утверждать, что модель при найденном наборе параметров действительно воспроизводит достаточно устойчивые и долговременные статистические взаимосвязи. Это является дополнительным аргументом в пользу того, что модель пригодна для построения достаточно надежных прогнозов. Оценки параметров модели на интервале с января 2010 г. до июня 2017 г. для прогноза на 6 месяцев вперед представлены в табл. 2 и 3.

Таблица 2.

**Оценки параметров модели на интервале до июня 2017 г.  
для прогноза на 6 месяцев вперед (часть 1)**

a1	-2,814	b1	1,416	tauSa	-0,052
a2	-1,606	b2	1,578	tauLa	0,035
a3	1,730	b3	1,183	tauSh	0,108
a4	0,965	b4	1,013	tauLh	0,046
a5	-7,608	b5	0,148	tauvSa	0,470
a6	-0,557	b6	0,596	tauvLa	-0,307
a7	0,524	b7	0,538	tauvSh	0,975
a8	1,238	b8	1,279	tauvLh	0,097
				tauvSf	-0,013

Таблица 3.

**Оценки параметров модели на интервале до июня 2017 г.  
для прогноза на 6 месяцев вперед (часть 2)**

c1	0,015	cc1	-0,016	cf1	0,111	d1	0,640
c2	0,074	cc2	-0,001	cf2	0,690	d2	0,535
c3	0,115	cc3	0,019	cf3	-0,050	d3	-0,268
c4	0,700	cc4	0,735	cf4	0,585	d4	0,059
c5	0,000	cc5	0,000	cf5	-0,001	d5	-0,545
c6	-0,101	cc6	-0,016	cf6	-1,155		
c7	0,006	cc7	0,001	cf7	0,009		
c8	0,192	cc8	0,278	cf8	0,812		

### 3.5. Сравнение результатов

В следующей таблице показано среднее процентное отклонение прогнозируемых значений от фактического значения на каждый из шести месяцев, а также средние значения за весь период прогнозирования.

Таблица 4.

**Среднее процентное отклонение прогнозируемых значений  
от фактического значения на каждый из шести месяцев**

		Глубина прогноза						Среднее
		1	2	3	4	5	6	
Кредиты фирмам, руб. (La)	М	0,7	1,3	1,3	1,2	1,4	1,9	1,3
	Э	0,6	0,8	1,1	1,6	2,0	2,4	1,4
Депозиты фирм, руб. (Sa)	М	1,2	2,6	2,0	2,5	1,5	1,4	1,9
	Э	2,6	3,4	2,9	3,3	3,3	3,8	3,2
Кредиты фирмам, валю- та (vLa)	М	0,7	1,8	3,0	3,6	5,1	6,2	3,4
	Э	1,2	2,1	2,9	3,9	5,0	6,2	3,6
Депозиты фирм, валюта (vSa)	М	2,1	4,6	4,8	7,0	6,7	7,1	5,4
	Э	2,8	4,2	5,5	7,0	8,0	9,1	6,1
Кредиты населению, руб. (Lh)	М	0,7	1,2	1,6	2,6	3,5	3,7	2,2
	Э	0,4	0,6	1,0	1,5	1,9	2,4	1,3
Депозиты населения, руб. (Sh)	М	0,7	1,4	1,8	1,7	1,9	2,1	1,6
	Э	0,5	0,9	1,2	1,2	1,4	1,5	1,1

Окончание табл. 4.

		Глубина прогноза						Среднее
		1	2	3	4	5	6	
Кредиты населению, валюта (vLh)	М	1,2	1,9	3,0	4,0	4,4	4,3	3,1
	Э	1,7	4,9	7,4	10,3	13,1	16,1	8,9
Депозиты населения, валюта (vSh)	М	0,9	1,7	2,7	3,3	4,2	4,6	2,9
	Э	1,0	1,6	2,4	3,3	4,2	5,2	3,0
Ликвидность, руб. (A)	М	7,4	10,3	4,4	7,9	8,7	3,5	7,0
	Э	8,7	9,6	9,2	8,6	7,6	7,7	8,5
Резервы, руб. (Rc)	М	0,4	0,4	1,0	1,1	0,9	1,4	0,9
	Э	3,9	6,4	8,5	8,8	10,2	11,6	8,2
Ликвидность, валюта (vA)	М	25,8	22,3	18,5	16,2	13,5	6,8	17,2
	Э	3,9	6,4	8,5	8,8	10,2	11,6	8,2

Из таблицы видно, что представленная оптимизационная модель системно дает менее точные прогнозы, чем модели из класса ARIMAX только для двух переменных – депозиты и кредиты населения в рублях (Sh и Lh), проигрывая в точности порядка 0,5 и 0,9 п.п. соответственно. Другая проблемная переменная – валютная ликвидность. В данном случае существенные расхождения с фактическими значениями прогнозы по модели демонстрируют при малом горизонте прогнозирования, но при прогнозе на 6 месяцев вперед прогноз модели оказывается практически в два раза точнее. По всем остальным переменным оптимизационная модель деятельности банковской системы оказывается более точной, чем эконометрические модели.

#### 4. Заключение

Целью настоящей работы является создание инструмента, способного количественно оценить реакцию российской банковской системы в терминах основных показателей ее деятельности на изменения в остальной экономике (в том числе связанные с внешними ограничениями в период санкций), а также проводимую Банком России денежно-кредитную политику. В качестве инструмента предлагается модель банковской системы Российской Федерации, построенная как оптимизационная задача агрегированного макроагента. Она успешно воспроизводит широкий набор показателей, характеризующих деятельность банковской системы, номинированных в рублях и в иностранной валюте. Описана методика вывода соотношений модели, включающая постановку оптимизационной задачи макроагента «банк». В задаче предполагается максимизация приведенного потока прибыли при бюджетном ограничении, балансов отдельных кредитов и депозитов, ограничений ликвидности и требования достаточности резервов. В статье приводится система уравнений, описывающая решение этой задачи. Подробно описан переход от

непрерывного времени к дискретному, новый подход к смягчению условий дополняющей нежесткости, основанный на предположении о наличии в модели магистрального свойства.

В процессе оценки параметров модели показано, что стандартный метод позволяет достаточно точно воспроизвести исторические ряды, но дает невысокое качество прогнозов. Примененный метод многошаговых прогнозов, однако, успешно воспроизводит исторические ряды и дает достаточно точные прогнозы. Сравнение со стандартными эконометрическими конструкциями показало, что модель с параметрами, полученными методом многошаговых прогнозов, строит прогнозы несколько лучше, чем ARIMAX и значительно лучше, чем AR, ARIMA, VAR, VARX.

Также в статье показано, что при поиске параметров модели методом многошаговых прогнозов оптимальные значения оказываются примерно одинаковыми для разных интервалов оценивания и для разных длин прогноза (от одного до шести месяцев). Такая устойчивость параметров дает нам основания считать, что модель воспроизводит долгосрочные соотношения модельных переменных и может быть использована для прогнозирования и сценарного анализа. Кроме того, модель может быть использована для оценки реакции банковской системы на проводимую денежно-кредитную политику, различные внешние ограничения и общее состояние экономики. При этом сама модель может быть использована как блок более общей модели общего равновесия экономики России.

\* \*  
\*

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Алескеров Ф.Т., Белоусова В.Ю., Ивашковская И.В., Погорельский К.Б., Степанова А.Н.* Анализ эффективности издержек и распределения влияния между акционерами банка. Ч. 1 // Управление в кредитной организации. 2010. № 2. С. 49–64.

*Андреев М.Ю., Пильник Н.П., Поспелов И.Г.* Моделирование деятельности современной российской банковской системы // Экономический журнал ВШЭ. 2009а. Т. 13. № 2. С. 143–171.

*Андреев М.Ю., Пильник Н.П., Поспелов И.Г.* Модель межвременного равновесия экономики Республики Казахстан // Труды МФТИ. 2013. Т. 5. № 4. С. 62–78.

*Андреев М.Ю., Пильник Н.П., Поспелов И.Г.* Сильный магистральный эффект в модели рациональных ожиданий современной банковской системы России // Журнал Новой экономической ассоциации. 2009б. Т. 1. № 2. С. 70–84.

*Андреев М.Ю., Поспелов И.Г., Поспелова И.И., Хохлов М.А.* Технология моделирования экономики и модель современной экономики России. М.: МИФИ, 2007.

*Васильев С.Б., Пильник Н.П.* Модель банковской системы США: описание переходных процессов в течение 1970–2010-х годов // Труды Московского физико-технического института. 2014. Т. 6. № 4. С. 4–16.

*Васильев С.Б., Пильник Н.П., Радионов С.А.* Смягчение условий дополняющей нежесткости в динамических моделях общего равновесия // Математическое моделирование. 2018. (В печати.)

*Дедова М.С., Пильник Н.П., Поспелов И.Г.* Описание потребности в ликвидности со стороны российской банковской системы на основе статистики оборотов // Журнал Новой экономической ассоциации. 2014. Т. 24. № 4. С. 87–110.

Дубинин С.К. Российская банковская система – испытание финансовым кризисом // Деньги и кредит. 2015. № 1. С. 9–12.

Журавлева Т.Л., Леонов М.А. Банковская система России в последние годы: общий и региональный взгляд // Научно-исследовательский финансовый институт. Финансовый журнал. 2015. Т. 28. № 6. С. 47–58.

Комиссарова К.А., Пеникас Г.И. Моделирование последствий регулирования российских национальных системно значимых банков // Управление финансовыми рисками. 2013. № 4. С. 256–273.

Леонидов А.В., Румянцев Е.Л. Оценка системных рисков межбанковского рынка России на основе сетевой топологии // Журнал Новой экономической ассоциации. 2013. № 3 (19). С. 65–80.

Малахов Д.И., Пильник Н.П., Радионов С.А. Стабильность распределения банков как аргумент в пользу концепции агрегированного агента // Экономический журнал ВШЭ. 2015. Т. 19. № 4. С. 395–422.

Мамонов М.Е. Влияние кризиса на прибыльность российского банковского сектора // Банковское дело. 2011. № 12. С. 15–25.

Мамонов М.Е. Моделирование конкуренции в российском банковском секторе с использованием подхода Панзара – Росса: теоретический и прикладной аспекты // Прикладная эконометрика. 2010. № 4(20). С. 3–27.

Мамонов М.Е., Пестова А.А., Панкова В.А., Ахметов Р.Р., Солнцев О.Г. Долгосрочное прогнозирование размера и структуры финансового сектора России. Серия докладов об экономических исследованиях. Банк России, 2017. № 20.

Мамонов М.Е. Рынок кредитов населению: идентификация спроса и предложения в рамках ВЕСМ-анализа // Экономический журнал ВШЭ. 2017. Т. 21. № 2. С. 251–282.

Пильник Н.П., Поспелов И.Г. О естественных терминальных условиях в моделях межвременного равновесия // Экономический журнал ВШЭ. 2007. Т. 11. № 1. С. 1–34.

Пильник Н.П., Радионов С.А. О новых подходах к идентификации блоков моделей общего равновесия // Труды Московского физико-технического института. 2017. Т. 9. № 3. С. 151–160.

Столбов М.И., Голощапова И.О., Солнцев О.Г., Ахметов Р.Р., Панкова В.А., Цепилова Е.А. Определение модели российского финансового сектора на основе межстранового анализа // Вопросы экономики. 2018. № 5. С. 1–20.

Швандар Д.В., Концевич О.В. Управление структурным профицитом ликвидности банковской системы // Научно-исследовательский финансовый институт. Финансовый журнал. 2017. Т. 37. № 3. С. 57–70.

Andrievskaya I., Semenova M. Market Discipline in the Interbank Market: Evidence from Russia // Eastern European Economics. 2015. Vol. 53. № 2. P. 69–98.

Belousova V., Karminsky A.M., Kozyr I. Bank Ownership and Profit Efficiency of Russian Banks // Bank of Finland Institute for Economies in Transition. Series DP «BOFIT Discussion Papers». 2018. № 5.

Belousova V., Karminsky A. M., Kozyr I. The Macroeconomic and Institutional Determinants of the Profit Efficiency Frontier for Russian Banks // Applied Econometrics. 2018. № 49. P. 91–114.

Benes J., Kumhof M. Risky Bank Lending and Optimal Capital Adequacy Regulation. Tech. Rep. // IMF Working Papers 11/130. International Monetary Fund, 2011.

Bernanke B., Gertler M., Gilchrist S. The Financial Accelerator in a Quantitative Business Cycle Framework // Handbook of Macroeconomics / J.B. Taylor, M. Woodford (eds.). 1999. Vol. 1. 1 edn. Chap. 21. P. 1341–1393.

Bernanke B., Gertler M. Agency Costs, Net Worth, and Business Fluctuations // American Economic Review. 1989. 79(1). P. 14–31.

Brunnermeier M.K., Sannikov Y. A Macroeconomic Model with a Financial Sector // American Economic Review. 2014. 104(2). P. 379–421.

Carlstrom C., Fuerst T. Agency Costs, Net Worth, and Business Fluctuations: A Computable General Equilibrium Analysis // American Economic Review. 1997. 87(5). P. 893–910.

Fungacova Z., Solanko L., Weill L. Market Power in the Russian Banking Industry // Economie Internationale. 2011. 4. P. 127–145.

*Fungacova Z., Solanko L.* The Russian Banking Industry after the 2008–2009 Financial Crisis What Next? Tech. Rep. 74. Russian Analytical Digest. 2010.

*Gertler M., Karadi P.* A Model of Unconventional Monetary Policy // Journal of Monetary Economics. 2011. 58(1). P. 17–34.

*Gertler M., Kiyotaki N., Queralto A.* Financial Crises, Bank Risk Exposure and Government Financial Policy // Journal of Monetary Economics. 2012. 59(5). P. 17–34.

*Gertler M., Kiyotaki N.* Financial Intermediation and Credit Policy in Business Cycle Analysis // Handbook of Monetary Economics / B.M. Friedman, M. Woodford (eds.). 2010. Vol. 3. 1 edn. Chap. 11. P. 547–599.

*He Z., Krishnamurthy A.* A Model of Capital and Crises // The Review of Economic Studies. 2012. 79(2). P. 735–777.

*Karminsky A.M., Kostrov A.* The Probability of Default in Russian Banking // Eurasian Economic Review. 2014. Vol. 4. № 1. P. 81–98.

*Khankov I.O., Penikas H.I.* Modelling Probability of Default of Russian Banks and Companies Using Copula Models // University of Pavia. Series DEM «Department of Economics and Management Working Paper Series». 2015. № 113.

*Kiyotaki N., Moore J.* Credit Cycles // Journal of Political Economy. 1997. 105(2). P. 211–248.

*Mamonov M.E., Vernikov A.V.* Bank Ownership and Cost Efficiency: New Empirical Evidence from Russia // Economic Systems. 2017. Vol. 41. № 2. P. 305–319.

*Mamonov M., Pestova A., Solntsev O.* Stress Test of Russian Banks: Lack of Capital Is Not Treated by Changes in Prudential Regulation // World Finance Review. 2012. № May. P. 51–53.

*Penikas H.I., Andrievskaya I.K.* Copula-Application to Modelling Russian Banking System Capital Adequacy According to Basel II IRB-Approach // Model Assisted Statistics and Applications. 2012. Vol. 7. № 4. P. 267–280.

*Pilnik N.P., Pospelov I.G., Radionov S.A., Zhukova A.A.* The Intertemporal General Equilibrium Model of the Economy with the Product, Money and Stock Markets // International Journal of Computational Economics and Econometrics. 2014. Vol. 4. № 1–2. P. 207–233.

## The Optimal Behavior Model of the Modern Russian Banking System

Nikolay Pilnik<sup>1</sup>, Stanislav Radionov<sup>2</sup>, Artem Yazykov<sup>3</sup>

<sup>1</sup> National Research University Higher School of Economics,  
20, Myasnitskaya st., Moscow, 101000, Russian Federation.  
E-mail: npilnik@hse.ru

<sup>2</sup> National Research University Higher School of Economics,  
20, Myasnitskaya st., Moscow, 101000, Russian Federation.  
E-mail: saradionov@edu.hse.ru

<sup>3</sup> National Research University Higher School of Economics,  
20, Myasnitskaya st., Moscow, 101000, Russian Federation.  
E-mail: artem.yazykov@yandex.ru

The paper describes the new version of the model of the Russian banking system, which successfully reproduces a wide set of parameters characterizing its performance: loans and deposits of firms and households, liquidity nominated both in rubles and in foreign currency, mandatory reserves. We describe the technique of derivation of model relations, which includes the statement of the problem of macroeconomic agent “bank”. This problem is based on the maximization of discounted flow of profit subject to budget constraint, balance of loans and deposits, liquidity constraints and reserve sufficiency requirements. The paper contains the system of equations which describes the solution of the problem. We provide a detailed description of transition of continuous to discrete time and the new approach to the relaxation of complementary slackness conditions based on the assumption that the model exhibits a turnpike property.

Apart from the standard approach to the parameter estimation for this class of models, we apply a method of multi-step forecasting. We show that the standard method of estimations allows to closely reproduce the historic series but leads to the poor quality of forecasts. The method of multi-step forecasting, on the other hand, successfully reproduces historic series and also leads to rather accurate forecasts. We compared it with standard econometric techniques and show that the model with parameters obtained via multi-step forecast method provides somewhat better forecasts than ARIXAM and much better ones than AR, ARIMA, VAR and VARX. We also show that then we use multi-step forecasting method, optimal values of parameters

are about the same for different intervals of estimation and different lengths of forecasts (from one to six months). Such a stability of parameters makes us think that the model reproduces long-term relations of variables and can be used for forecasting and scenario analysis.

The model can be used for the evaluation of reaction of the banking system on the monetary policy, external constraints of different kind and the general condition of the economy. The model can be used as a block of a bigger general equilibrium model of the Russian economy.

**Key words:** banking system; loans; deposits; liquidity; settlement accounts; forecasting; mandatory reserves.

**JEL Classification:** C65, C68.

\* \*  
\*

### References

Aleskerov F.T., Belousova V.Yu., Ivashkovskaya I.V., Pogorel'skiy K.B., Stepanova A.N. (2010) Analiz effektivnosti izderzhkek i raspredeleniya vliyaniya mezhdru aktsionerami banka. Ch. 1 [Analysis of the Costs Efficiency and of the Distribution of Shareholders' Influence. Ch. 1]. *Upravleniye v kreditnoy organizatsii*, 2, pp. 49–64.

Andreyev M., Pilnik N., Pospelov I. (2009a) Modelirovanie deyatel'nosti sovremennoy rossiyskoy bankovskoy sistemy [The Modelling of the Modern Russian System]. *HSE Economic Journal*, 13, 2, pp. 143–171.

Andreyev M.Yu., Pil'nik N.P., Pospelov I.G. (2013) Model' mezhvremennogo ravnovesiya ekonomiki Respubliki Kazakhstan [The Intertemporal Equilibrium Model of the Kazakhstan Republic Economy]. *Trudy MFTI*, 5, 4, pp. 62–78.

Andreyev M.Yu., Pilnik N.P., Pospelov I.G. (2009b) Sil'nyy magistral'nyy effekt v modeli ratsional'nykh ozhidaniy sovremennoy bankovskoy sistemy Rossii [The Strong Turnpike Property in the Rational Expectations Models of the Modern Russian Banking System]. *Journal of the New Economic Association*, 1, 2, pp. 70–84.

Andreyev M.Yu., Pospelov I.G., Pospelova I.I., Khokhlov M.A. (2007) *Tekhnologiya modelirovaniya ekonomiki i model' sovremennoy ekonomiki Rossii* [The Economic Modelling Technology and the Model of Modern Russian Economy]. Moscow: MIFI.

Vasil'yev S.B., Pilnik N.P. (2014) Model' bankovskoy sistemy SSA: opisaniye perekhodnykh protsessov v techeniye 1970–2010-kh godov [The Model of the US Banking System: The Description of the Transition Process During 1970–2010<sup>th</sup> Years]. *Trudy Moskovskogo fiziko-tekhnicheskogo instituta*, 6, 4, pp. 4–16.

Vasil'yev S.B., Pilnik N.P., Radionov S.A. (2018) Smyagcheniye usloviy dopolnyayushchey nezhestkosti v dinamicheskikh modelyakh obshchego ravnovesiya [The Relaxation of Complementary Slackness Conditions in the Dynamic General Equilibrium Models]. *Matematicheskoye modelirovaniye*, in press.

Dedova M.S., Pilnik N.P., Pospelov I.G. (2014) Opisaniye potrebnosti v likvidnosti so storony rossiyskoy bankovskoy sistemy na osnove statistiki oborotov [The Description of the Need for Liquidity from the Russian Banking System Based on the Turnovers Data]. *Journal of the New Economic Association*, 4, 24, pp. 87–110.

Dubinin S. (2015) Rossiiskaia bankovskaia sistema: ispytanie finansovym krizisom [Russian Banking System: The Trial by the Financial Crisis]. *Money and Credit*, 1, pp. 9–12.

Zhuravleva T., Leonov M. (2015) Bankovskaya sistema v Rossii v poslednie gody: obshy i regionalny vzglyad [The Russian Banking System During the Last Years: The General and the Regional Approach]. *Financial Journal*, 28, 6, pp. 47–58.

Komissarova K.A., Penikas G.I. (2013) Modelirovaniye posledstviy regulirovaniya rossiyskikh natsional'nykh sistemno znachimykh bankov [The Modelling of the Consequences of the Russian Systematically Significant Banks]. *Upravleniye finansovymi riskami*, 4, pp. 256–273.

Leonidov A.V., Romyantsev Ye.L. (2013) Otsenka sistemnykh riskov mezhbankovskogo rynka Rossii na osnove setevoy topologii [The Evaluation of Systematic Risks of Russian Interbank Market Based on Network Topology]. *Journal of the New Economic Association*, 3, 19, pp. 65–80.

Malakhov D.I., Pilnik N.P., Radionov S.A. (2015) Stabil'nost' raspredeleniya bankov kak argument v pol'zu kontseptsii agregirovannogo agenta [Stability of Banks' Distribution As an Argument in the Favor of Aggregated Agent Concept]. *HSE Economic Journal*, 19, 4, pp. 395–422.

Mamonov M.E. (2011) Vliyaniye krizisa na pribyl'nost' rossiyskogo bankovskogo sektora [The Impact of Crisis on the Profitability of the Russian Banking Sector]. *Bankovskoye delo*, 12, pp. 15–25.

Mamonov M.E. (2010) Modelirovanie konkurencii v rossiyskom bankovskom sektore s ispol'zovaniem podhoda Panzara – Rossa: teoreticheskij i prikladnoj aspekty [Modeling of Competition in the Russian Banking Sector Using the Pansar – Ross Approach: Theoretical and Applied Aspects]. *Applied Econometrics*, 4, 20, pp. 3–27.

Mamonov M.E., Pestova A.A., Pankova V.A., Akhmetov R.R., Solntsev O.G. (2017) Dolgosrochnoye prognozirovaniye razmera i struktury finansovogo sektora Rossii [Long-term Forecasting of the Size and Structure of the Russian Financial Sector]. *Bank Rossii. Seriya dokladov ob ekonomicheskikh issledovaniyakh*, 20.

Mamonov M. (2017) Rynok kreditov naseleniyu: identifikatsiya sprosa i predlozheniya v ramkah VECM-analiza [The Market of the Household Credits: Demand and Supply Identification in the VECM-analysis Framework]. *HSE Economic Journal*, 21, 2, pp. 251–282.

Pilnik N.P., Pospelov I.G. (2007) O estestvennykh terminalnykh usloviyakh v modelyakh mezhvremennogo ravnovesiya [On the Natural Terminal Conditions in the Intertemporal Equilibrium Models]. *HSE Economic Journal*, 11, 1, pp. 1–34.

Pilnik N., Radionov S. (2017) O novykh podkhodakh k identifikatsii blokov modeley obshego ravnovesiya [On the New Approaches to the Identification of the Blocks of General Equilibrium Models]. *MIPT Proceedings*, 9, 3, pp. 151–160.

Stolbov M.I., Goloshchapova I.O., Solntsev O.G., Akhmetov R.R., Pankova V.A., Tsepilova E.A. (2018) Opredeleniye modeli rossiyskogo finansovogo sektora na osnove mezhstranovogo analiza [The Determination of the Model of the Russian Financial System Based on the Intercounty Analysis]. *Voprosy ekonomiki*, 5, pp. 1–20.

Shvandar D.V., Kontsevich O.V. (2017) Upravlenie strukturnim profitsitim likvidnosti bankovskoi sistemy [The Control of the Structural Liquidity Surplus of the Banking System]. *Financial Journal*, 37, 3, pp. 57–70.

Andrievskaya I., Semenova M. (2015) Market Discipline in the Interbank Market: Evidence from Russia. *Eastern European Economics*, 53, 2, pp. 69–98.

Belousova V., Karminsky A.M., Kozyr I. (2018) *Bank Ownership and Profit Efficiency of Russian Banks*. Bank of Finland Institute for Economies in Transition. Series DP «BOFIT Discussion Papers», no 5.

Belousova V., Karminsky A. M., Kozyr I. (2018) The Macroeconomic and Institutional Determinants of the Profit Efficiency Frontier for Russian Banks. *Applied Econometrics*, 49, pp. 91–114.

Benes J., Kumhof M. (2011) *Risky Bank Lending and Optimal Capital Adequacy Regulation*. Tech. Rep. IMF Working Papers 11/130, International Monetary Fund.

Bernanke B., Gertler M., Gilchrist S. (1999) The Financial Accelerator in a Quantitative Business Cycle Framework. *Handbook of Macroeconomics* (eds. Taylor J.B., Woodford M.), 1, 1 edn., chap. 21. pp. 1341–1393.

- Bernanke B., Gertler M. (1989) Agency Costs, Net Worth, and Business Fluctuations. *American Economic Review*, 79, 1, pp. 14–31.
- Brunnermeier M.K., Sannikov Y. (2014) A Macroeconomic Model with a Financial Sector. *American Economic Review*, 104, 2, pp. 379–421.
- Carlstrom C., Fuerst T. (1997) Agency Costs, Net Worth, and Business Fluctuations: A Computable General Equilibrium Analysis. *American Economic Review*, 87, 5, pp. 893–910.
- Fungacova Z., Solanko L., Weill L. (2011) Market Power in the Russian Banking Industry. *Economie Internationale*, 4, pp. 127–145.
- Fungacova Z., Solanko L. (2010) The Russian Banking Industry after the 2008–2009 Financial Crisis What Next? Tech. Rep. 74. *Russian Analytical Digest*.
- Gertler M., Karadi P. (2011) A Model of Unconventional Monetary Policy. *Journal of Monetary Economics*, 58, 1, pp. 17–34.
- Gertler M., Kiyotaki N., Queralto A. (2012) Financial Crises, Bank Risk Exposure and Government Financial Policy. *Journal of Monetary Economics*, 59, 5, pp. 17–34.
- Gertler M., Kiyotaki N. (2010) Financial Intermediation and Credit Policy in Business Cycle Analysis. *Handbook of Monetary Economics* (eds. Friedman B.M., Woodford M.), 3, 1 edn., chap. 11, pp. 547–599.
- He Z., Krishnamurthy A. (2012) A Model of Capital and Crises. *The Review of Economic Studies*, 79, 2, pp. 735–777.
- Karminsky A.M., Kostrov A. (2014) The Probability of Default in Russian Banking. *Eurasian Economic Review*, 4, 1, pp. 81–98.
- Khankov I.O., Penikas H.I. (2015) *Modelling Probability of Default of Russian Banks and Companies Using Copula Models*. University of Pavia. Series DEM «Department of Economics and Management Working Paper Series», no 113.
- Kiyotaki N., Moore J. (1997) Credit Cycles. *Journal of Political Economy*, 105, 2, pp. 211–248.
- Mamonov M.E., Vernikov A.V. (2017) Bank Ownership and Cost Efficiency: New Empirical Evidence from Russia. *Economic Systems*, 41, 2, pp. 305–319.
- Mamonov M., Pestova A., Solntsev O. (2012) Stress Test of Russian Banks: Lack of Capital Is Not Treated by Changes in Prudential Regulation. *World Finance Review*, May, pp. 51–53.
- Penikas H.I., Andrievskaya I.K. (2012) Copula-Application to Modelling Russian Banking System Capital Adequacy According to Basel II IRB-Approach. *Model Assisted Statistics and Applications*, 7, 4, pp. 267–280.
- Pilnik N.P., Pospelov I.G., Radionov S.A., Zhukova A.A. (2014) The Intertemporal General Equilibrium Model of the Economy with the Product, Money and Stock Markets. *International Journal of Computational Economics and Econometrics*, 4, 1–2, pp. 207–233.