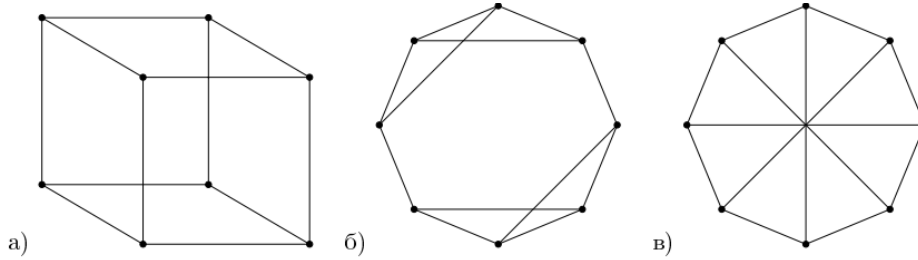
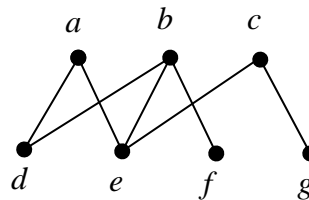


1. Можно ли представить следующие графы в виде двудольных? Если да, то укажите разбиение на соответствующее множество вершин.



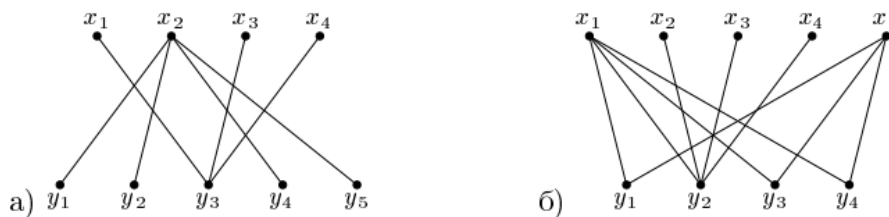
2. Является ли множество дуг M паросочетанием в двудольном графе G (рис. ниже), если

- а) $M = \{ad, be, ce\}$;
- б) $M = \{ae, bd, cg\}$;
- в) $M = \{ae, bf, cg\}$?



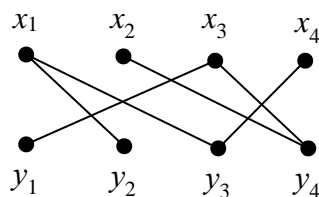
3. Пусть $X = \{2, 3, 5, 11\}$ и $Y = \{99, 100, 102\}$. Определим дугу между элементами x и y , $x \in X, y \in Y$, если x является делителем y или y является делителем x . Постройте двудольный граф и проверьте, выполняется ли условие Холла.

4. Найдите дефициты двудольных графов, изображенных на рис. ниже. Существуют ли в этих графах совершенные паросочетания? Если нет, то найдите максимальное паросочетание.



5. Пусть $G = (X \cup Y, \Gamma)$, где $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{v, w, x, y, z\}$ и $\Gamma = \{ay, az, bv, bw, cv, cw, dv, dw, dx, dy, dz\}$.

- а) Постройте двудольный граф G .
- б) Пусть $M = \{ay, bw, dx\}$ – паросочетание в двудольном графе G . Будет ли множество дуг $\{ay, yd, dx\}$ чередующейся цепью для M ? А множество дуг $\{za, ay, yd, dx\}$? Почему?
- в) Постройте чередующуюся цепь для паросочетания M , если это возможно.
- г) Является ли паросочетание M максимальным?
- д) Существует ли совершенное паросочетание в двудольном графе G ?
- е. На рис. ниже изображен двудольный граф $G = (X \cup Y, \Gamma)$. Пусть $M = \{x_1y_3, x_3y_4\}$ – паросочетание в G . Используя алгоритм и паросочетание M в качестве начального, постройте максимальное паросочетание для заданного двудольного графа.



7. Члены комитета по налоговой реформе Бундестага Бруно, Франц, Карл и Лотар должны провести переговоры «один на один» с представителями парламентов Франции, России, Великобритании и Швеции.

- Бруно знает французский, английский и шведский языки;
- Франц – французский и русский языки;
- Карл – русский, английский и шведский языки;
- Лотар – русский и английский языки.

Смогут ли депутаты Бундестага провести переговоры на родных языках со всеми представителями парламентов этих стран?

Указание: для ответа на этот вопрос

а) постройте соответствующий двудольный граф и проверьте выполнение условия Холла.

б) при построении паросочетания нужно строго придерживаться следующего правила:

- на 1-м шаге паросочетание должно содержать одну дугу;
- на 2-м шаге чередующаяся цепь должна содержать три дуги;
- на 3-м шаге чередующаяся цепь должна содержать не менее трех дуг;
- на 4-м шаге – на Ваше усмотрение.

1. Пусть $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ и предпочтения участников имеют вид:

$$P(m_1) = w_1, w_3, w_2;$$

$$P(w_1) = m_4, m_2, m_1, m_3;$$

$$P(m_2) = w_2, w_3, w_1;$$

$$P(w_2) = m_3, m_1, (w_2), m_2, m_4;$$

$$P(m_3) = w_1, w_2, (m_3), w_3;$$

$$P(w_3) = m_1, m_2, m_4, m_3.$$

$$P(m_4) = w_3, w_2, w_1;$$

Является ли пара (m_3, w_2) блокирующей в следующих паросочетаниях?

а) $\mu = \begin{matrix} w_2 & w_3 & (m_3) & w_1 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{matrix};$

б) $\mu = \begin{matrix} w_1 & w_3 & w_2 & (m_4) \\ m_3 & m_2 & m_1 & m_4 \end{matrix};$

в) $\mu = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & (m_4) \\ m_2 & m_3 & m_1 & m_4 \end{matrix}.$

2. Пусть $M = \{m_1, m_2, m_3\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, и предпочтения участников имеют вид:

$$P(m_1) = w_2, w_1, w_3;$$

$$P(w_1) = m_1, m_3, m_2;$$

$$P(m_2) = w_1, w_3, w_2;$$

$$P(w_2) = m_3, m_1, m_2;$$

$$P(m_3) = w_1, w_2, w_3;$$

$$P(w_3) = m_1, m_3, m_2.$$

Рассмотрим паросочетания $\mu = \begin{matrix} w_2 & w_1 & w_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{matrix}$ и $\mu' = \begin{matrix} w_3 & w_2 & w_1 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{matrix}.$

Являются ли они устойчивыми? Если нет, то какие пары блокируют эти паросочетания?

3. Пусть $M = \{m_1, m_2, m_3\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, и предпочтения участников имеют вид:

$$P(m_1) = w_2, w_3, w_1;$$

$$P(w_1) = m_2, m_1, m_3;$$

$$P(m_2) = w_2, w_3, w_1;$$

$$P(w_2) = m_3, m_2, m_1;$$

$$P(m_3) = w_1, w_3, w_2;$$

$$P(w_3) = m_3, m_1, m_2.$$

Найдите устойчивые паросочетания μ_M и μ_W .

4. Пусть $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Предпочтения участников имеют следующий вид:

$$P(m_1) = w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2;$$

$$P(w_1) = m_2, m_1, m_4, m_3;$$

$$P(m_2) = w_4, w_2, w_3, w_1;$$

$$P(w_2) = m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4;$$

$$P(m_3) = w_1, w_2, w_3, w_4;$$

$$P(w_3) = m_2, m_3, m_4, m_1;$$

$$P(m_4) = w_2, w_4, w_1, w_3;$$

$$P(w_4) = m_3, m_2, m_4, m_1.$$

а) Постройте устойчивые паросочетания μ_M и μ_W ;

б) Выясните, есть ли женщины, которые более предпочитают μ_M , чем μ_W ? Есть ли мужчины, которые более предпочитают μ_W , чем μ_M ?

5. Пусть $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$, $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$. Предпочтения участников имеют следующий вид:

$$P(m_1) = w_3, w_1, w_2, w_4;$$

$$P(w_1) = m_1, m_3, m_2, m_4;$$

$$P(m_2) = w_4, w_3, w_1, w_2;$$

$$P(w_2) = m_3, m_1, m_2, m_4;$$

$$P(m_3) = w_4, w_3, w_1, w_2;$$

$$P(w_3) = m_4, m_1, m_2, m_3;$$

$$P(m_4) = w_1, w_4, w_2, w_3;$$

$$P(w_4) = m_1, m_4, m_3, m_2.$$

Постройте устойчивые паросочетания μ_M и μ_W .

6. Пусть предпочтения студентов в задаче распределения по комнатам в общежитии имеют следующий вид:

$$a) \quad P(a) = b, c, d;$$

$$b) \quad P(a) = b, d, c;$$

$$P(b) = c, a, d;$$

$$P(b) = d, c, a;$$

$$P(c) = a, b, d;$$

$$P(c) = a, b, d;$$

$$P(d) = b, a, c;$$

$$P(d) = b, a, c.$$

Существует ли при данных условиях устойчивое паросочетание?

7. Пусть есть 7 абитуриентов $A = \{a_1, a_2, \dots, a_7\}$ и четыре университета $U = \{U_1, U_2, U_3, U_4\}$. Университеты U_1, U_3, U_4 имеют по 2 вакантных места, а университет U_2 – только одно. Предпочтения участников в этой задаче имеют следующий вид:

$$P(U_1) = P(U_2) = a_7, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_1; \quad P(a_1) = P(a_2) = P(a_6) = U_3, U_1, U_4, U_2;$$

$$P(U_3) = a_6, a_1, a_2, a_4, a_5, a_3, a_7;$$

$$P(a_3) = P(a_4) = U_2, U_4, U_1, U_3;$$

$$P(U_4) = a_4, a_2, a_5, a_7, a_3, a_1, a_6;$$

$$P(a_5) = P(a_7) = U_4, U_2, U_3, (a_{5,7}), U_1.$$

Постройте устойчивое паросочетание μ_A .