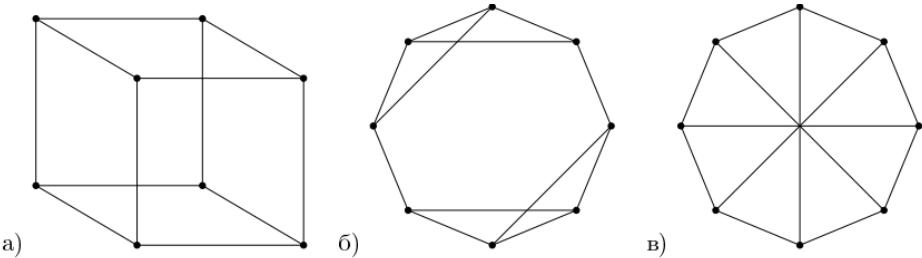
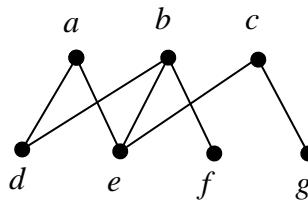


1. Можно ли представить следующие графы в виде двудольных? Если да, то укажите разбиение на соответствующее множество вершин.



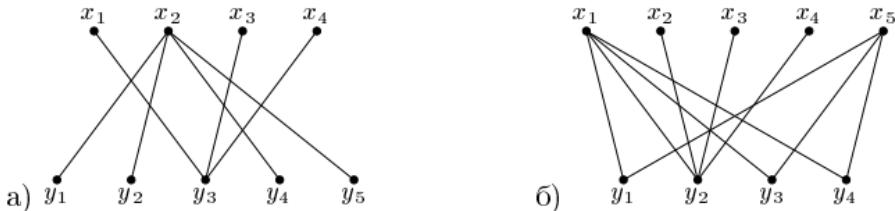
2. Является ли множество дуг  $M$  паросочетанием в двудольном графе  $G$  (рис. ниже), если

- a)  $M = \{ad, be, ce\}$ ;
- б)  $M = \{ae, bd, cg\}$ ;
- в)  $M = \{ae, bf, cg\}$ ?



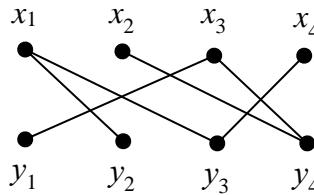
3. Пусть  $X = \{2, 3, 5, 11\}$  и  $Y = \{99, 100, 102\}$ . Определим дугу между элементами  $x$  и  $y$ ,  $x \in X, y \in Y$ , если  $x$  является делителем  $y$  или  $y$  является делителем  $x$ . Постройте двудольный граф и проверьте, выполняется ли условие Холла.

4. Найдите дефициты двудольных графов, изображенных на рис. ниже. Существуют ли в этих графах совершенные паросочетания? Если нет, то найдите максимальное паросочетание.



5. Пусть  $G = (X \cup Y, \Gamma)$ , где  $X = \{a, b, c, d\}$ ,  $Y = \{v, w, x, y, z\}$  и  $\Gamma = \{ay, az, bv, bw, cv, cw, dv, dw, dx, dy, dz\}$ .

- а) Постройте двудольный граф  $G$ .
- б) Пусть  $M = \{ay, bw, dx\}$  – паросочетание в двудольном графе  $G$ . Будет ли множество дуг  $\{ay, yd, dx\}$  чередующейся цепью для  $M$ ? А множество дуг  $\{za, ay, yd, dx\}$ ? Почему?
- в) Постройте чередующуюся цепь для паросочетания  $M$ , если это возможно.
- г) Является ли паросочетание  $M$  максимальным?
- д) Существует ли совершенное паросочетание в двудольном графе  $G$ ?
- 6. На рис. ниже изображен двудольный граф  $G = (X \cup Y, \Gamma)$ . Пусть  $M = \{x_1y_3, x_3y_4\}$  – паросочетание в  $G$ . Используя алгоритм и паросочетание  $M$  в качестве начального, постройте максимальное паросочетание для заданного двудольного графа.



7. Члены комитета по налоговой реформе Бундестага Бруно, Франц, Карл и Лотар должны провести переговоры «один на один» с представителями парламентов Франции, России, Великобритании и Швеции.

- Бруно знает французский, английский и шведский языки;
- Франц – французский и русский языки;
- Карл – русский, английский и шведский языки;
- Лотар – русский и английский языки.

Смогут ли депутаты Бундестага провести переговоры на родных языках со всеми представителями парламентов этих стран?

Указание: для ответа на этот вопрос

- а) постройте соответствующий двудольный граф и проверьте выполнение условия Холла.
- б) при построении паросочетания нужно строго придерживаться следующего правила:  
 - на 1-м шаге паросочетание должно содержать одну дугу;  
 - на 2-м шаге чередующаяся цепь должна содержать три дуги;  
 - на 3-м шаге чередующаяся цепь должна содержать не менее трех дуг;  
 - на 4-м шаге – на Ваше усмотрение.

1. Пусть  $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ ,  $W = \{w_1, w_2, w_3\}$  и предпочтения участников имеют вид:

$$\begin{array}{ll} P(m_1) = w_1, w_3, w_2; & P(w_1) = m_4, m_2, m_1, m_3; \\ P(m_2) = w_2, w_3, w_1; & P(w_2) = m_3, m_1, (w_2), m_2, m_4; \\ P(m_3) = w_1, w_2, (m_3), w_3; & P(w_3) = m_1, m_2, m_4, m_3. \\ P(m_4) = w_3, w_2, w_1; & \end{array}$$

Является ли пара  $(m_3, w_2)$  блокирующей в следующих паросочетаниях?

- $\mu = \begin{matrix} w_2 & w_3 & (m_3) & w_1; \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{matrix}$ ;
- $\mu = \begin{matrix} w_1 & w_3 & w_2 & (m_4); \\ m_3 & m_2 & m_1 & m_4 \end{matrix}$ ;
- $\mu = \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 & (m_4). \\ m_2 & m_3 & m_1 & m_4 \end{matrix}$ .

2. Пусть  $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ ,  $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ , и предпочтения участников имеют вид:

$$\begin{array}{ll} P(m_1) = w_2, w_1, w_3; & P(w_1) = m_1, m_3, m_2; \\ P(m_2) = w_1, w_3, w_2; & P(w_2) = m_3, m_1, m_2; \\ P(m_3) = w_1, w_2, w_3; & P(w_3) = m_1, m_3, m_2. \end{array}$$

Рассмотрим паросочетания  $\mu = \begin{matrix} w_2 & w_1 & w_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{matrix}$  и  $\mu' = \begin{matrix} w_3 & w_2 & w_1 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{matrix}$ .

Являются ли они устойчивыми? Если нет, то какие пары блокируют эти паросочетания?

3. Пусть  $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ ,  $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ , и предпочтения участников имеют вид:

$$\begin{array}{ll} P(m_1) = w_2, w_3, w_1; & P(w_1) = m_2, m_1, m_3; \\ P(m_2) = w_2, w_3, w_1; & P(w_2) = m_3, m_2, m_1; \\ P(m_3) = w_1, w_2, w_3; & P(w_3) = m_1, m_3, m_2. \end{array}$$

$$P(m_3) = w_1, w_3, w_2; \quad P(w_3) = m_3, m_1, m_2.$$

Найдите устойчивые паросочетания  $\mu_M$  и  $\mu_W$ .

4. Пусть  $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ ,  $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ . Предпочтения участников имеют следующий вид:

$$\begin{array}{ll} P(m_1) = w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2; & P(w_1) = m_2, m_1, m_4, m_3; \\ P(m_2) = w_4, w_2, w_3, w_1; & P(w_2) = m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4; \\ P(m_3) = w_1, w_2, w_3, w_4; & P(w_3) = m_2, m_3, m_4, m_1; \\ P(m_4) = w_2, w_4, w_1, w_3; & P(w_4) = m_3, m_2, m_4, m_1. \end{array}$$

а) Постройте устойчивые паросочетания  $\mu_M$  и  $\mu_W$ ;

б) Выясните, есть ли женщины, которые более предпочтитают  $\mu_M$ , чем  $\mu_W$ ? Есть ли мужчины, которые более предпочтитают  $\mu_W$ , чем  $\mu_M$ ?

5. Пусть  $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ ,  $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ . Предпочтения участников имеют следующий вид:

$$\begin{array}{ll} P(m_1) = w_3, w_1, w_2, w_4; & P(w_1) = m_1, m_3, m_2, m_4; \\ P(m_2) = w_4, w_3, w_1, w_2; & P(w_2) = m_3, m_1, m_2, m_4; \\ P(m_3) = w_4, w_3, w_1, w_2; & P(w_3) = m_4, m_1, m_2, m_3; \\ P(m_4) = w_1, w_4, w_2, w_3; & P(w_4) = m_1, m_4, m_3, m_2. \end{array}$$

Постройте устойчивые паросочетания  $\mu_M$  и  $\mu_W$ .

6. Пусть предпочтения студентов в задаче распределения по комнатам в общежитии имеют следующий вид:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad P(a) = b, c, d; & \text{b)} \quad P(a) = b, d, c; \\ P(b) = c, a, d; & P(b) = d, c, a; \\ P(c) = a, b, d; & P(c) = a, b, d; \\ P(d) = b, a, c; & P(d) = b, a, c. \end{array}$$

Существует ли при данных условиях устойчивое паросочетание?

7. Пусть есть 7 абитуриентов  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_7\}$  и четыре университета  $U = \{U_1, U_2, U_3, U_4\}$ . Университеты  $U_1, U_3, U_4$  имеют по 2 вакантных места, а университет  $U_2$  – только одно. Предпочтения участников в этой задаче имеют следующий вид:

$$\begin{array}{ll} P(U_1) = P(U_2) = a_7, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_1; & P(a_1) = P(a_2) = P(a_6) = U_3, U_1, U_4, U_2; \\ P(U_3) = a_6, a_1, a_2, a_4, a_5, a_3, a_7; & P(a_3) = P(a_4) = U_2, U_4, U_1, U_3; \\ P(U_4) = a_4, a_2, a_5, a_7, a_3, a_1, a_6; & P(a_5) = P(a_7) = U_4, U_2, U_3, (a_{5,7}), U_1. \end{array}$$

Постройте устойчивое паросочетание  $\mu_A$ .