1. Четыре профессора претендуют на пост декана математического факультета: Альфа, Бета, Гамма и Дельта. Профиль предпочтений 17 сотрудников факультета представлен ниже:

|  |  |
| --- | --- |
|  | Число проголосовавших |
| Место | 6 | 5 | 4 | 2 |
| 1 | Альфа | Бета | Гамма | Дельта |
| 2 | Бета | Альфа | Дельта | Гамма |
| 3 | Гамма | Гамма | Бета | Альфа |
| 4 | Дельта | Дельта | Альфа | Бета |

Есть ли здесь победитель Кондорсе? Какой кандидат будет объявлен лучшим при использовании правила Борда, правила Хара?

Что изменится в результатах каждого правила, если два последних сотрудника поменяли местами Альфу и Гамму в своих предпочтениях?

1. На президентских выборах в США в 2000 году основная борьба происходила между республиканцем Джорджем Бушем-младшим и демократом Альбертом Гором. Исход выборов решили избиратели штата Флорида и президентом стал Джордж Буш-младший. Рассмотрим упрощенные предпочтения избирателей штата на следующем множестве кандидатов {Буш, Гор, Нейдер}:

49% избирателей: Буш, Гор, Нейдер;

20% избирателей: Гор, Нейдер, Буш;

20% избирателей: Гор, Буш, Нейдер;

11% избирателей: Нейдер, Гор, Буш.

Кто из кандидатов был бы выбран, если бы использовалось: а) правило относительного большинства, б) правила простого большинства, в) правило Борда?

1. Может ли существовать три победителя Кондорсе в мажоритарном графе? Если да, то приведите соответствующий пример. Если нет, то докажите утверждение в общем виде.
2. Верно ли следующее утверждение: вариант, считающийся наилучшим по Борда, является наилучшим вариантом хотя бы для одного из участников.

**Свойства правил голосования**

1. В депутатскую комиссию по вопросам жилищно-коммунального хозяйства, благоустройства, транспорта и связи Совета депутатов Тмутараканского района Сказочной области входят четыре депутата, которые предварительно предметно рассматривают предлагаемые поправки в соответствующие их профилю законодательные акты до рассмотрения Советом депутатов. Для принятия решения об одобрении или отклонении очередных поправок они голосуют (есть две альтернативы: «да», то есть рекомендовать Совету депутатов принять поправки, или «нет», то есть рекомендовать отклонить поправки). Председатель комиссии выписал результаты четырех последних голосований:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Первый депутат | Второйдепутат | Третийдепутат | Четвертыйдепутат | Результат |
| 1 | да | да | нет | нет | да |
| 2 | да | нет | нет | да | нет |
| 3 | нет | да | да | нет | нет |
| 4 | нет | да | нет | нет | да |

Будет ли применяемое ими правило принятия решений (какое именно правило принятия решений применяется неизвестно, результаты других голосований также неизвестны):

1) анонимным, 2) нейтральным, 3) монотонным? Поясните свой ответ.

1. Семья из трех человек решает, как провести ближайшие выходные, и выбирает между двумя вариантами: провести день в аквапарке (А) или на весь день поехать в контактный зоопарк (З). Они придумали особое правило принятия решения. В ниже приведенной таблице перечислены некоторые варианты голосования членов семьи, а также принятое решение, согласно используемому ими правилу.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Папа | Мама | Ребенок | Результат |
| 1 | А | З | А | З |
| 2 | З | А | З | З |
| 3 | А | А | З | А |

Будет ли применяемое ими правило принятия решений (какое именно правило принятия решений применяется неизвестно, результаты других голосований также неизвестны): а) анонимным, б) нейтральным, в) монотонным? Поясните свой ответ.

1. Совет директоров инвестиционного фонда ООО «Рога и Копыта» состоит из 4 человек и коллективно принимает решения относительно возможных инвестиционных проектов. Для принятия решения они голосуют (есть две альтернативы: «да», то есть вложить деньги в проект, или «нет», то есть не вкладываться в проект). Председатель совета директоров Остап Бендер выписал результаты четырех последних голосований:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Остап | Киса | Первый зам. | Второй зам. | Результат голосования |
| 1 | нет | да | да | нет | да |
| 2 | да | нет | нет | нет | да |
| 3 | нет | да | нет | да | нет |
| 4 | нет | да | да | да | да |

Будет ли применяемое ими правило принятия решений (какое именно правило принятия решений применяется неизвестно, результаты других голосований также неизвестны): а) анонимным, б) нейтральным, в) монотонным? Поясните свой ответ.

1. Пусть три друга выбирают место совместного отдыха из следующих вариантов: *А*={Сочи (C), Туапсе (Т), Валдай (В), Подмосковье (П)}. Их предпочтения на множестве *А* имеют вид:

$\begin{matrix}\overline{\begin{matrix}P\_{1}&P\_{2}&P\_{3}\end{matrix}}\\\begin{matrix}С&С&Т\\Т&Т&С\\В&В&П\\П&П&В\end{matrix}\end{matrix}$

Предпочтения их жен имеют вид:

$$\begin{matrix}\overline{\begin{matrix}P'\_{1}&P'\_{2}&P'\_{3}\end{matrix}}\\\begin{matrix}С&Т&Т\\Т&С&С\\В&В&В\\П&П&П\end{matrix}\end{matrix}$$

а) Предположим, что коллективное решение *Р* содержит пару (Т, В). Если правило построения коллективного решения локально, то содержится ли пара (Т, В) в коллективном решении по профилю $P'$?

б) Пусть известно, что в коллективном решении друзей вариант В оказался более предпочтительным, чем П. Если используемое друзьями и их женами правило принятия решения является монотонным, то будет ли вариант В более предпочтительным, чем П, также и для их жен? Можно ли сказать то же самое про пару С и Т?

в) Пусть правило построения коллективного решения удовлетворяет условию единогласия. Какие пары обязано содержать коллективное решение по профилю $\vec{P}=(P\_{1},P\_{2},P\_{3})$? По профилю $\vec{P'}=(P'\_{1},P'\_{2},P'\_{3})$?

г) Пусть коллективное решение содержит пару (С, Т), если первый участник имеет такое предпочтение. Является ли он диктатором?

1. Рассмотрим несколько правил голосования:

а) правило простого большинства для случая 3 избирателей: альтернатива *х* предпочитается альтернативе *у* в коллективном решении тогда и только тогда, когда большинство избирателей считает, что *х* лучше, чем *у*;

б) правило Борда: альтернативы ранжируются согласно сумме полученных баллов;

в) правило простого меньшинства для случая 3 избирателей: альтернатива *х* предпочитается альтернативе *у* в коллективном решении тогда и только тогда, когда меньшинство избирателей считает, что *х* лучше, чем *у*;

г) правило единогласия для случая 3 избирателей:$ P=P\_{1}∩P\_{2}∩P\_{3}$;

д) федеративное правило $P=\left(P\_{1}∩P\_{2}\right)∪P\_{3}$ для случая 4 избирателей;

е) «диктаторство по альтернативам» для случая трех избирателей и трех альтернатив: решение принимается следующим образом – альтернативы сравниваются попарно и $∀i a\_{i}Px⇔a\_{i}P\_{i}x$, т.е. если $a\_{1}P\_{1}a\_{2}$ и/или $a\_{1}P\_{1}a\_{3}$, то в коллективном решении будет так же $a\_{1}Pa\_{2}$ и/или $a\_{1}Pa\_{3}$ (то есть каждый является «диктатором» для «своей» альтернативы – первый избиратель для первой альтернативы, второй – для второй и т.д.);

ж) в выборах принимают участие три избирателя *N*={1, 2, 3} и три кандидата *А*={*a*, *b*, *c*}. Коллективное решение строится следующим образом: кандидату *a* для победы над остальными требуется получить единогласную поддержку избирателей, кандидату *b* – голос хотя бы одного избирателя, кандидат *c* побеждает всегда.

1) Являются ли эти правила локальными? Если да, то приведите списочное представление. Если нет, докажите почему.

2) Удовлетворяют ли эти правила принятия решений условиям: a) ненавязанности; б) единогласия; в) монотонности; г) нейтральности; д) анонимности?

Докажите или приведите контрпримеры.

1. Администрация школы решает вопрос о месте проведения выпускного вечера в этом году. На выбор в городе есть несколько подходящих мест: (*а*) небольшой ресторан, (*b*) городской дом культуры, (*с*) теплоход, (*d*) спортзал этой школы. Решение будут принимать родительские комитеты всех классов. Всего в этом году выпускается три класса: 11А, 11Б и 11В, в родительских комитетах которого по 3, 2 и 3 человека соответственно. Для принятия решения администрация предложила использовать правило федерации $P=(P\_{1}∩P\_{2}∩P\_{3})∪(P\_{4}∩P\_{5})∪(P\_{6}∩P\_{7}∩P\_{8})$, которое предполагает объединение единогласных решений всех комитетов.

а) Где будут праздновать окончание школы выпускники этого года, если предпочтения родителей выглядят следующим образом:

*P*1 = *P*3 = *P*6: *a*, *b*, *c*, *d*;

*P*2 = *P*8: *c*, *a*, *b*, *d*;

*P*4: *d*, *b*, *a*, *c*;

*P*5 = *P*7: *b*, *a*, *c*, *d*?

б) Где будут проводить выпускной, если предпочтения *P*4 изменятся и совпадут с предпочтениями *P*1?

в) Что изменится в коллективном решении, если вместо правила федерации будет использовано правило Борда?

**Решения на графе**

1. Найдите максимальные внутренне устойчивые множества и определите числа внутренней устойчивости для графов. Найдите минимальные внешне устойчивые множества и определите числа внешней устойчивости для графов. Есть ли у этих графов ядра?



1. Докажите, что если *S* – ядро графа, то *S* – максимальное внутренне устойчивое множество.
2. Докажите, что победитель Кондорсе входит в любое ядро мажоритарного графа, если оно существует.
3. Могут ли два ядра одного графа содержать разное число элементов? Приведите подтверждающий пример или докажите, что это неверно.
4. Найдите, пользуясь методом, описанным в задаче о лидере, ранжирование участников в следующих турнирах:

