Домашнее задание по теме «Теория коллективного выбора»

Это задание не на оценку, а для отработки материала.

1. Трое студентов подыскивают квартиру рядом с метро. Ими рассматриваются в качестве вариантов квартиры рядом со станциями метро Курская (К), Славянский бульвар (С), Лубянка (Л) и Римская (Р), относительно которых друзья имеют следующие предпочтения

  

 $\begin{matrix}К&Р&Л\\Л&К&Р\end{matrix}$

 $\begin{matrix}Р&Л&С\\С&С&К\end{matrix}$

Постройте мажоритарный граф для заданного профиля предпочтений. Есть ли здесь победитель Кондорсе? Сравните полученный результат с решением по правилу Борда.

1. На президентских выборах в США в 2000 году основная борьба происходила между республиканцем Джорджем Бушем-младшим и демократом Альбертом Гором. Исход выборов решили избиратели штата Флорида и президентом стал Джордж Буш-младший. Рассмотрим упрощенные предпочтения избирателей штата на следующем множестве кандидатов {Буш, Гор, Нейдер}:

49% избирателей: Буш, Гор, Нейдер;

20% избирателей: Гор, Нейдер, Буш;

20% избирателей: Гор, Буш, Нейдер;

11% избирателей: Нейдер, Гор, Буш.

Кто из кандидатов был бы выбран, если бы использовалось: а) правило относительного большинства, б) правила простого большинства, в) правило Борда?

1. Может ли существовать три победителя Кондорсе в мажоритарном графе? Если да, то приведите соответствующий пример. Если нет, то докажите утверждение в общем виде.
2. Администрация школы решает вопрос о месте проведения выпускного вечера в этом году. На выбор в городе есть несколько подходящих мест: (*а*) небольшой ресторан, (*b*) городской дом культуры, (*с*) теплоход, (*d*) спортзал этой школы. Решение будут принимать родительские комитеты всех классов. Всего в этом году выпускается три класса: 11А, 11Б и 11В, в родительских комитетах которого по 3, 2 и 3 человека соответственно. Для принятия решения администрация предложила использовать правило федерации $P=(P\_{1}∩P\_{2}∩P\_{3})∪(P\_{4}∩P\_{5})∪(P\_{6}∩P\_{7}∩P\_{8})$, которое предполагает объединение единогласных решений всех комитетов.

а) Где будут праздновать окончание школы выпускники этого года, если предпочтения родителей выглядят следующим образом:

*P*1 = *P*3 = *P*6: *a*, *b*, *c*, *d*;

*P*2 = *P*8: *c*, *a*, *b*, *d*;

*P*4: *d*, *b*, *a*, *c*;

*P*5 = *P*7: *b*, *a*, *c*, *d*?

б) Где будут проводить выпускной, если предпочтения *P*4 изменятся и совпадут с предпочтениями *P*1?

в) Что изменится в коллективном решении, если вместо правила федерации будет использовано правило Борда?

**Свойства правил голосования**

1. Семья из 4 человек (папа, мама, дочь и сын) каждую пятницу решает, ехать ли всей семьей на дачу на выходные. Для принятия решения они голосуют (есть две альтернативы: «да», то есть всем четверым ехать, или «нет», то есть всем четверым не ехать). Сын выписал результаты четырех последних голосований:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Папа | Мама | Дочь | Сын | Результат |
| 1 | да | да | нет | нет | да |
| 2 | да | нет | нет | да | нет |
| 3 | нет | да | да | нет | да |
| 4 | да | нет | нет | нет | да |

Будет ли применяемое ими правило принятия решений (какое именно правило принятия решений применяется неизвестно, результаты других голосований также неизвестны):

а) анонимным, б) нейтральным, в) монотонным? Поясните свой ответ.

1. Рассмотрим несколько правил голосования:

а) правило диктатора $ P=P\_{2}$ для случая 3 избирателей;

б) федеративное правило $P=\left(P\_{1}∩P\_{2}\right)∪P\_{3}$ для случая 4 избирателей;

в) федеративное правило $P=\left(P\_{1}∩P\_{2}\right)∪\left(P\_{2}∩P\_{4}\right)$ для случая 4 избирателей;

г) федеративное правило $P=\left(P\_{1}∩P\_{2}\right)∪\left(P\_{2}∩P\_{3}\right)$ для случая 3 избирателей;

д) первое правило Коупленда*:* строим числовую функцию $u(x)$, равную разности мощностей нижнего и верхнего срезов альтернативы $x$ в мажоритарном отношении *μ*, т.е. $∀x\in A u\left(x\right)=\left|xP\right|-|Px|$. Тогда коллективное решение строится в соответствии с полученными числовыми значениями этой функции (верхним срезом альтернативы называется множество альтернатив, которые ее доминируют по мажоритарному отношению; нижним срезом – множество альтернатив, которые доминируются ею).

Являются ли эти правила локальными? Если да, то приведите списочное представление. Если нет, докажите почему.

1. Рассмотрим следующее правило построения коллективного решения по индивидуальным предпочтениям *n* участников (будем считать, что *n* кратно 6): пара (*x*, *y*) входит в коллективное решение, если она принадлежит:

а) ровно *n*/3 предпочтений;

б) ровно *n*/2+1 предпочтений;

в) более *n*/2 предпочтений;

г) не менее *n*/2 предпочтений;

д) не менее *n* – 1 предпочтений;

е) ровно *n* предпочтениям.

Каким свойствам удовлетворяют эти правила (ненавязанность, единогласие, локальность, монотонность, нейтральность, анонимность)?