Домашнее задание №14 на тему «Обобщенные паросочетания»

Это домашнее задание является необязательным, можно его не выполнять. Оценка за него заменит минимальную из оценок за остальные домашние задания.

На выполнение домашнего задания дается 2 недели, дедлайн – 12 июня, 23:59. В течение недели после дедлайна домашнюю работу можно сдать, но со штрафом в 50%.

Выполненное домашнее задание прислать как скан/фото хорошего качества (одним файлом!) мне на почту (lyude@inbox.ru), либо набрать решение и также прислать по почте.

Литература:

 1. Алескеров Ф.Т., Хабина Э.Л., Шварц Д.А. Бинарные отношения, графы и коллективные решения. М.: Физматлит, 2012. (глава 2).

1. Пусть $M = \{m\_{1}; m\_{2}; m\_{3}; m\_{4}\}$, $W = \{w\_{1}; w\_{2}; w\_{3}; w\_{4}\}$, и предпочтения участников имеют вид:

$$\begin{matrix}\begin{matrix}P\_{m\_{1}}:w\_{3},w\_{2},w\_{1},\left(m\_{1}\right),w\_{4}\\P\_{m\_{2}}:w\_{1},w\_{3},w\_{2},w\_{4},(m\_{2})\\\begin{matrix}P\_{m\_{3}}:w\_{2},w\_{1},w\_{3},w\_{4},(m\_{3})\\P\_{m\_{4}}:w\_{4},w\_{1},w\_{3},w\_{2},(m\_{4})\end{matrix}\end{matrix}&\begin{matrix}P\_{w\_{1}}:m\_{1},m\_{3},m\_{2},m\_{4},\left(w\_{1}\right)\\P\_{w\_{2}}:m\_{4},m\_{2},m\_{3},m\_{1},\left(w\_{2}\right)\\\begin{matrix}P\_{w\_{3}}:m\_{4},m\_{1},m\_{2},m\_{3},\left(w\_{3}\right)\\P\_{w\_{4}}:m\_{1},m\_{2},m\_{4},m\_{3},\left(w\_{4}\right)\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}$$

1) Является ли устойчивым паросочетание $μ=\left(\begin{matrix}w\_{2}&w\_{4}&w\_{3}&w\_{1}\\m\_{1}&m\_{2}&m\_{3}&m\_{4}\end{matrix}\right)?$ Найдите все блокирующие пары, если таковые есть у этого паросочетания.

2) Постройте устойчивые паросочетания $μ\_{M}$ и $μ\_{W}$ по алгоритму отложенного принятия Гейла-Шепли.

3) Есть ли женщины, которые более предпочитают $μ\_{M}$, чем $μ\_{W}$? Есть ли мужчины, которые более предпочитают $μ\_{W}$, чем $μ\_{M}$?

2. Пусть предпочтения участников из множеств $M=\{m\_{1}, m\_{2}, m\_{3}\}$ и $W=\{w\_{1}, w\_{2}, w\_{3}\}$ выглядят следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
| $$P\left(m\_{1}\right)=w\_{3}, \left(m\_{1}\right)w\_{1}, w\_{2};$$$$P\left(m\_{2}\right)= w\_{3}, \left(m\_{2}\right), w\_{1}, w\_{2};$$$$P\left(m\_{3}\right)=w\_{1}, w\_{2}, \left(m\_{3}\right), w\_{3};$$ | $$P\left(w\_{1}\right)=m\_{1}, m\_{2}, (w\_{1}), m\_{3};$$$$P\left(w\_{2}\right)=m\_{2}, m\_{1}, (w\_{2}), m\_{3};$$$P\left(w\_{3}\right)=m\_{3}, \left(w\_{3}\right), m\_{1}, m\_{2}$*.* |

Постройте устойчивые паросочетания $μ\_{M}$ и $μ\_{W}$.

3. Рассмотрим проблему распределения абитуриентов по вузам. Пусть есть 7 абитуриентов $A = \{a\_{1}; a\_{2};…; a\_{7}\}$ и четыре университета $U = \{U\_{1}; U\_{2}; U\_{3},U\_{4}\}$. Университеты $U\_{1}, U\_{3},U\_{4}$ имеют по 2 вакантных места, а университет $U\_{2}$ – только одно. Предпочтения участников в этой задаче имеют следующий вид:

$$\begin{matrix}\begin{matrix}P\_{U\_{1}}=P\_{U\_{2}}:a\_{1},a\_{2},a\_{3},…,a\_{7}\\P\_{U\_{3}}:a\_{3},a\_{1},a\_{2},a\_{4},a\_{5},a\_{6},a\_{7}\\P\_{U\_{4}}:a\_{5},a\_{2},a\_{4},a\_{7},a\_{3},a\_{1},a\_{6}\end{matrix}&\begin{matrix}P\_{a\_{1}}=P\_{a\_{2}}=P\_{a\_{6}}:U\_{3},U\_{2},U\_{1}\\P\_{a\_{3}}=P\_{a\_{4}}:U\_{2},U\_{1},U\_{3}\\\begin{matrix}P\_{a\_{5}}=P\_{a\_{7}}:U\_{2},U\_{3},\left(a\_{5,7}\right),U\_{1}\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}$$

Постройте устойчивое паросочетание$μ\_{a}$.

4. Пусть в задаче распределения студентов {*a*, *b*, *c*, *d*} по комнатам в общежитии предпочтения имеют следующий вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | $P\left(a\right)=b;d;c$  |
|  | $P\left(b\right)=d;c;a$  |
|  | $P\left(c\right)=a;b;d$  |
|  | $P\left(d\right)=b;a;c$  |

Существует ли при данных условиях устойчивое паросочетание?