**Паросочетания**

**Условие Холла:** А – некое подмн-во X (может состоять и из 1 эл-та). Тогда J(A) – это все элементы из мн-ва Y, с которыми связаны элементы из подмн-ва А. Двудольный граф имеет совершенное паросочетание, если и только если для всех А из X выполняется нер-во |J(A)|≥|A|.

**Дефицит:** d = max(|A| - |J(A)|), A ⊆ X, d ≥ 0. Совершенное паросочетание в двудольном графе существует тогда и только тогда, когда d = 0. Мощность максимального паросоч-я |M| = |X| - d, |X|≤|Y|.

**Чередующаяся цепь -** последовательность смежных рёбер, где нечётные рёбра не принадлежат паросоч-ю, чётные - принадлежат, длина цепи -нечетная, 1-ая и последняя вершины - свободные (черед. цепь может быть длины = 1). **Теорема**: если в двудольном графе G паросоч-е М не максимально, то G содержит чередующуюся цепь М. **-> Алгоритм поиска максимального паросоч-я:** 1) взять любое паросоч-е М (даже с 1 дугой), 2) найти чередующуюся цепь с элементами М, 3) Если цепь найдена, построить М', содержащее на одну дугу больше, чем М, 4) Повторить пункт 2 для М', пока не будет найдено макс. паросоч.

**Обобщённые паросочетания**

Обозначения: μ – обобщенное паросоч-е (простыми словами: то, как будут объединены множества в зависимости от предпочтений); m, w – элементы множеств M, W; G = (M U W, Г).

**(m,w) - блокирующая пара:** 1) $(m, w) \notin \mu$ (этой пары нет в паросоч-и), 2) $m \succ_w \mu(w)$ (w больше хочет быть с m, чем с той парой, что есть у него в существующем паросоч-и), 3) аналогично для m: $w \succ_m \mu(m)$. **Нет блокирующих пар -> устойчивое паросоч-е.**

**Построение уст. паросоч-я μ(m), алгоритм Гейла-Шепли:** (m – мужчина, w - женщина); 1. Каждому m приписывается первая в его предпочтении женщина. 2. Для каждой w просматриваются приписанные ей мужчины, она оставляет того из них, который стоит выше в её предпочтении. Те, кто не отвергаются, остаются на данном шаге. Остальные m повторяют шаг 1, но уже для тех w, которые стоят следующими в их предпочтениях. m, w могут остаться одни, если им это предпочтительнее (обозначается через скобки; например, для m: (m)).

**Многокритериальный выбор**

**Парето-оптимальность:** мн-во не может быть пустым; альтернатива должна не отставать от других по всем критериям (≥) и превосходить их (>) хотя бы в одном. **Нормировка:** балльная (макс. балл = макс. значение); от 0 до 1 по формуле $V_{new} = \frac{V - min}{max - min}$, min и max ищутся по столбцу, V – значение.

**Построение оптимального решения:** а) простая свёртка (сложить баллы по строчкам), б) аддитивная (линейная) свёртка (сложить баллы, умноженные на коэффициенты), в) расстояние до идеальной точки ($\sqrt{(10-x_1)^2 + (10-x_2)^2 + \cdots}$), г) пороговое агрегир-е (подсчет кол-ва критер. с опр. оценкой)

**Влияние**

$\boldsymbol{N}$ = {1, … , $n$} - участники, партии и т.д.; $\boldsymbol{k_i}$ – число голосов $i$-ого участника; $\boldsymbol{q}$ –квота; **решение принимается**: $\sum_{i \in W} k_i \geq q$, $W \subseteq N$ - множество игроков «за» решение; **коалиция $S \subseteq N$** – некоторое множество игроков; **$S$ - выигрывающая коалиция**, если $\sum_{i \in S} k_i \geq q$; игрок $j \in S$ называется **ключевым**, если без $j$ коалиция перестает быть выигрывающей; **С – минимально выигрывающая коалиция**, если $\forall i \in C$ являются ключевым

**Индексы влияния**

**1. Индекс Банцафа:** $\boxed{\boldsymbol{\beta(i) = \frac{b_i}{\sum_j b_j}}}$, где $\boldsymbol{b_i}$ – число выигрывающих коалиций, в которых игрок $i$ – ключевой

**2. Индекс Шепли-Шубика:** $\boxed{\boldsymbol{\sigma(i) = \sum_S \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}(v(S) - v(S\backslash\{i\}))}}$, где $n$- всего число партий, $S$-число участников в опр. коалиции,

$v(S) - v(S\backslash\{i\}) = \begin{cases} 1, i - \text{ключевой в } S \\ 0, \quad \text{иначе} \end{cases}$ Интерпретация: средний вклад игрока $i$ во всевозможные коалиции, содержащие игрока $i$

**3. Индекс Джонстона:** $\boxed{\boldsymbol{JI(i) = \frac{TJI(i)}{\sum_j TJI(j)}}}$, где $TJI(i) = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k}$, $n_j$-число ключевых партий в выигрывающей коалиции; $k$-число выигрывающих коалиций, в которых $i$-ключевой

**4. Индекс Холера-Пакела:** $\boxed{\boldsymbol{HPI(i) = \frac{h_i}{\sum_j h_j}}}$ ,где $h_i$-число минимально выигрывающих коалиций, в которых $i$ - ключевой

**5. Индекс Дигена-Пакела:** $\boxed{\boldsymbol{DPI(i) = \frac{p(i)}{\sum_j p(j)}}}$, где $p(i) = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \cdots + \frac{1}{m_k}$, $m_j$-число ключевых игроков в минимально выигрывающей коалиции; $k$-число минимально выигрывающих коалиций, в которых $i$-ключевой

**Бинарные отношения**

Бинарное отношение (Б.О.) – это множество, определённое на парах декартового произведения некоторых множеств $A \times B$.

Чаще: $A = B \rightarrow P \subseteq A \times A$ – бинарное отношение, $A$ – некоторое множество. **Формат записи**: $(x, y) \in P$ или $xP\ B$

**Операции**

| | |
|---|---|
| $P' \cup P''$ = $\{(x, y) \mid (x, y) \in P'$ или $(x, y) \in P''\}$ – объединение | $P^d = P^{-1}$ = $\{(x, y) \mid (y, x) \in P\}$ – двойственное отношение |
| $P' \cap P''$ = $\{(x, y) \mid (x, y) \in P'$ и $(x, y) \in P''\}$ – пересечение | $P^c = \bar{P} = \{(x, y) \mid (x, y) \notin P\}$ – дополнение |
| $P' \setminus P''$ = $\{(x, y) \mid (x, y) \in P'$ и $(x, y) \notin P''\}$ – разность | $I_p = (A \times A)\backslash(P \cup P^d) = \overline{(P \cup P^d)} = \bar{P} \cap \overline{P^d}$ – отношение несравнимости для P |
| $P' \cdot P''$ = $\{(x, y) \mid \exists z \in A$: $(x, z) \in P'$ и $(z, y) \in P''\}$ – композиция | $P^{TR} = P \cup P^2 \cup \ldots = U_{i=1}^{\infty} P^i\ P\ i$ – транзитивное замыкание отношения P |

**Характеристика (свойства) Б.О.**

| *Характеристика* | *Описание* | *В графе* |
|---|---|---|
| Рефлексивность | $\forall x \in A$, $(x, x) \in$ P | У всех вершин есть петли. |
| Антирефлексивность | $\forall x \in A$, $(x, x) \notin$ P | Ни у какой вершины нет петли. |
| Симметричность | $\forall x, y \in A$, $xPy \Rightarrow yPx$ | Если есть связь между вершинами, то обязательно в обе стороны. |
| Асимметричность | $\forall x, y \in A$, $xPy \Rightarrow y\bar{P}x$ $((y, x) \notin P)$ | Если есть связь между вершинами, то только в одну сторону. Петель нет. |
| Антисимметричность | $\forall x, y \in A$, $xPy$ и $yPx \Rightarrow x = y$ | Если есть связь между вершинами, то только в одну сторону. Могут быть петли. |
| Полнота | $\forall x, y \in A$, $xPy$ или $yPx$ | Каждая пара вершин обязательно связана хотя бы в одну сторону. Обязат. есть петли. |
| Связность | $\forall x, y \in A$, $x \neq y \Rightarrow xPy$ или $yPx$ | Каждая пара верш. обязат. связ. хотя бы в 1 сторону. Петли могут как быть, так и не быть. |
| Транзитивность | $\forall x, y, z \in A$, $xPy$ и $yPz \Rightarrow xPz$ | Если две вершины связаны через посредника, то они также будут связаны и напрямую. |
| Отр. транзитивность | $\forall x, y, z \in A$, $xP^cy$ и $yP^cz \Rightarrow xP^cz$ | Если две вершины не связ. через посредника, то они также не будут связ. и напрямую. |
| Ацикличность | $\nexists t \geq 1$ и $a_1, a_2, \ldots, a_t : a_1Pa_2, a_2Pa_3, \ldots, a_{t-1}Pa_t, a_tPa_1$ | Нельзя вернуться в исх. верш., перемещаясь по рёбрам графа. |

**Классы бинарных отношений**

Б.О. $P$ является: - **частичным порядком**, если $P$ антирефлексивно и транзитивно (ациклично и транзитивно);
- **слабым порядком**, если $P$ отрицательно транзитивный частичный порядок (асимметрично и отрицательно транзитивно);
- **линейным порядком**, если $P$ связный слабый порядок.

**Модель ординальной полезности**

Введём некоторую функцию полезности на элементах из $A$ по следующему правилу: $u$: $A \rightarrow \mathbb{R}$+: $\forall x, y \in A$ $xPy \Leftrightarrow u(x) > u(y)$. Иначе говоря, $x$ «лучше», чем $y \Leftrightarrow$ полезность $x$ больше полезности $y$.

*****Соотношение $xPy \Leftrightarrow u(x) > u(y)$ выполняется для некоторой функции $u(x)$, в том и только том случае, когда $P$ – отношение **слабого порядка**.

**Функции выбора**

$A$ – **альтернативы**; $X \subseteq A$ – множество выборов или **представление**; $C(X) \subseteq X$ – некоторая **функция выбора** на $X$, $C$:$2^A \rightarrow 2^A$

**Свойства функций выбора**

| | | |
|---|---|---|
| **Наследование, Н** | $\forall X, X', X' \subseteq X \Rightarrow C(X) \cap X' \subseteq C(X')$ | Если сузить выбор, но то, что я бы выбрала из большего множества, в меньшем тоже доступно, я это тоже выберу. Не может быть такого, что то, что я бы выбрала на большем множестве и на меньшем мне также доступно, я бы не выбрала это сейчас |
| **Согласие, С** | $\forall X', X'', X = X' \cup X'' \Rightarrow C(X') \cap C(X'') \subseteq C(X' \cup X'')$ | То, что я выбирала и в одном множестве, и в другом, я бы выбрала также, если бы эти множества объединились. Не может быть такого, что я не выберу в объединении то, что я бы выбрала в каждом множестве по отдельности |
| **Отбрасывание, О** | $\forall X, X', C(X) \subseteq X' \subseteq X \Rightarrow C(X') = C(X)$ | Наш выбор не изменится, если из большого множества отбросить какие-либо невыбранные варианты |
| **Аксиома выбора Эрроу, АСА** | $\forall X, X', X' \subseteq X \Rightarrow \begin{cases} \text{если } C(X) = \emptyset \Rightarrow C(X') = \emptyset \\ \text{если } C(X) \cap X' \neq \emptyset \Rightarrow C(X') = C(X) \cap X' \end{cases}$ | Если на большем множестве ничего не выбирается, то и на меньшем множестве я ничего не выберу. А если на большем множестве что-то выбирается и если в меньшем множестве мне доступна часть этого выбора, то я выберу ровно эту часть и больше ничего |

***** Для выполнения АСА необходимо выполнение всех трёх свойств Н, С, О

**Функция выбора, рационализируемая бинарным отношением**

Функция выбора, рационализируема некоторым б.о. $P$ тогда и только тогда, когда на каждом предъявлении $X$ мы выбираем те альтернативы, которые не доминируются никем из $X$ в бинарном отношении (в них не должно входить никаких стрелочек в графе бинарного отношения).

Если для функции выбора выполняется:
- $\mathbf{ACA} \Leftrightarrow$ функцию выбора можно рационализировать **слабым порядком** и задать ординальную полезность $u$ на альтернативах;
- $\mathbf{H} \cap \mathbf{C} \cap \mathbf{O} \Leftrightarrow$ функцию выбора можно рационализировать **частичным порядком или отношением Парето**;
- $\mathbf{H} \cap \mathbf{C} \Leftrightarrow$ функцию выбора можно рационализировать некоторым **ацикличным бинарным отношением**.

*****Для того, чтобы восстановить граф б.о. для функции выбора (при соблюдении соответств. свойств), мы начинаем рисовать стрелки от меньших мн-в. Далее, переходя к большим мн-вам, сначала проверяем, достаточно ли тех стрелок, что мы уже нарисовали раньше (лишнего не дорисовываем)

**Коллективный выбор:**

Нижний контур: сколько альт-в хуже, чем… (пример: xP = 3, значит ‘x’ лучше 3 альт-в)

Верхний контур: сколько альт-в лучше, чем выбранная (пример: Px = 3, значит ‘x’ хуже 3 альт-в)

| Правило | Результат |
|---|---|
| Простое большинство: отношение альт-ив (xPy) присутствует у 50%+(строго) участников – рисуем стрелку в мажоритарном графе. | Мажоритарный граф (когда по первой строке – подм-во альтернатив, при несравнимости может и не быть таких альтернатив). |
| Относительное большинство: выбирается та альт-ва, за которую отдали больше всего голосов по первым местам. | Подм-во альтернатив (слабый порядок, если убирать альтернативы, выбранные на предыдущих шагах). |
| Правило Борда: каждой строке назначается ранг: наименее предпочтительной 0, далее +1. Далее считаем сумму рангов для альт-ив. | Подм-во альтернатив с наибольшим значением суммарного ранга. |
| Правило Хара: 1 шаг: есть ли альт-вы с 50%+ первых мест? Да? Мы выбрали! 2 шаг: нет таких? Удаляем альт-ву, у которой меньше всех первых мест. Продолжаем до конца. | Подм-во альтернатив с наибольшим количеством первых мест. (Линейный порядок, убирая альт-вы) |
| Правило Кондорсе: строим мажоритарный граф, ищем нодоминируемые альт-вы. | Подм-во альт-в. Может быть и пустое множество. |
| 1 Коупленд: строим мажоритарный граф, сравниваем разницу мощностей нижнего и верхнего контуров. | Подм-во альт-в. Можно построить слабый порядок |
| 2 Коупленд: строим мажоритарный граф, сравниваем мощность нижних контуров. | Подм-во альт-в. Можно построить слабый порядок |
| 3 Коупленд: строим мажоритарный граф, сравниваем мощность верхних контуров. | Подм-во альт-в. Можно построить слабый порядок |
| Диктатор: назначается диктатор, его предпочтения и есть ответ. | Линейный порядок (можно выбрать альт-ву). |
| Олигархия: назначается олигархия, пересечение их предпочтений и есть ответ. | Частичный порядок |
| Федерация: объединяем предпочтения олигархий | Произвольное БО |

| **Аксиомы [и их соотношение со списочным представлением]** |
|---|
| Локальность: решение о включении пары (x, y) в коллективное решение P зависит от индивидуальных предпочтений участников только относительно x, y. [$\exists$ списочное представление] |
| Единогласие: если все считают, что xPy, то в коллективном решении будет x лучше, чем y. [$\forall (x,y) N \in \Omega(x,y)$] |
| Ненавязанность: выбор зависит только от предпочтений участников и не может быть навязан процедурой (для каждой пары в каких-то профилях она выбирается, а также в каких-то профилях не выбирается. (не должно быть пустых списков) [[$\forall (x,y) \Omega(x,y) \neq \emptyset$ и $\Omega(x,y) \neq 2^N$] |
| Монотонность: если есть какое-то подм-во выбора, то этот выбор должен сохр. на всех надм-вах. [$\forall (x,y)\ \forall \omega, \omega', \omega \subseteq \omega': \omega \in \Omega(x,y) \Rightarrow \omega' \in \Omega(x,y)$] |
| Нейтральность: имена альтернатив не важны, нет дискриминации относительно выбора каких-то пар. [$\forall (x,y)\ \Omega(x,y) = \Omega$] |
| Анонимность: имена участников не важны (должны существовать всевозможные коалиции одного размера). [$\forall (x,y)$ и $\forall \omega \in \Omega(x,y)$: $\lvert\omega\rvert = s \Rightarrow$ $(\forall \omega': \lvert\omega'\rvert = s, \omega' \in \Omega(x,y))$] |

**Справедливый дележ**

Критерии справедливого дележа:

1. Пропорциональность: полезность каждого должна быть: $u_i(i) \geq \frac{100\%}{n}$ , где n – количество агентов.
2. Отсутствие зависти: полезн. каждого НА СВОЙ ВЗГЛЯД должна быть больше, чем полезность другого ПО МНЕНИЮ первого: $\forall i \neq j \in N,\ u_i(i) \geq u_i(j)$
3. Равноценность: полезности агентов должны быть равны: $\forall i, j \in N \rightarrow u_i(i) = u_j(j)$
4. Эффективность: такой дележ, при котором нельзя увеличить полезность !обоих! игроков.

$$\nexists U': U' \succ U => \begin{cases} U_i'(i) \geq U_i(i) \\ \nexists j: U_j'(j) > u_j(j) \end{cases}$$