ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ПРАКТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ИНДЕКСОВ[1]

Подготовил д.э.н. Игорь Ульянов
https://macrotrends.ru

[1] Приведенные в настоящей презентации теоретические выкладки не являются оригинальными и опираются на опубликованные работы других авторов. Являются оригинальными результаты проведенных автором расчетов истинного индекса стоимости жизни и эластичности замещения по данным Росстата.

Настоящая презентация составлена по материалам лекционного курса «Теория и применение экономических индексов», преподаваемого в ВШЭ по программе подготовки магистров.

Тексты лекций размещены по адресу:

http://macrotrends.ru/home/материалы-к-лекциям-по-курсу-теория-и/

Индекс (index number) – это статистика, которая одним числом выражает степень изменения во времени или в пространстве некоторого набора переменных, характеризующих исследуемое явление.

Согласно А. Боули, «индексы используются для измерения изменений количественной величины, которую невозможно наблюдать непосредственно» (Bowley, 1907, P. 216).

1. ТРИ ПОДХОДА К ТЕОРИИ ИНДЕКСОВ

Аксиоматический подход

Аксиоматический подход к индексам фокусируется на критериях (желаемых математических свойствах, или “аксиомах”) подходящих для оценки пригодности индексных формул. Система аксиом (тестов) – это набор определенных минимальных стандартов, которым должен соответствовать индекс.

При аксиоматическом подходе цены и количества товаров полагаются не зависимыми друг от друга переменными. Не делается никаких допущений об оптимальном поведении экономических агентов, которое могло бы породить взаимозависимость между ценами и количествами.

Стохастический подход

Главная идея стохастического подхода состоит в том, что вариация во времени цены каждого товара может быть разделена на две компоненты: общая вариация цен всех товаров (индекс цен) и вариация, характерная для каждого конкретного товара. Для определения индекса цен используются методы регрессии.

Экономический подход

Экономический подход к индексам цен основывается на допущении об оптимальном поведении экономических агентов. Так, в случае индекса стоимости жизни полагается, что домашние хозяйства воспринимают наблюдаемые цены как данность, тогда как физические количества товаров определяются путем решения экономической оптимизационной задачи.

На мой взгляд, фокус большинства исследований экономических индексов в настоящее время находится в сфере экономического подхода.

Примеры недавних работ:

- **Redding, Stephen J., and Weinstein, David E. 2020.** "Measuring Aggregate Price Indices with Taste Shocks: Theory and Evidence for CES Preferences." The Quarterly Journal of Economics, vol. 135(1), pages 503-560.
- **Redding, Stephen J., and Weinstein, David E. 2019.** “Online Technical Appendix to “Measuring Aggregate Price Indexes with Taste Shocks: Theory and Evidence for CES Preferences.” [Online]. Available at: https://www.princeton.edu/~reddings/papers/CES_22Sep2019_QJE_appendix.pdf.
- **Brynjolfsson, Erik, Collis, Avinash, Diewert, Erwin W., Eggers, Felix, and Fox, Kevin J. 2019.** “GDP-B: Accounting for the Value of New and Free Goods in the Digital Economy” NBER Working Paper No 25695 (March).

2. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

- Индексы
- Тесты (аксиомы)
- Теоремы

2.1. ИНДЕКСЫ

Индекс – это результат усреднения относительных изменений цен или количеств, вычисленных для каждого из товаров некоторой совокупности товаров; при этом усреднение может проводиться по формулам:

- среднего взвешенного арифметического – индексы Ласпейреса, индексы Палгрейва, Лоу, Янга, Маршалла-Эджворта, Гири-Камиса,
- среднего взвешенного гармонического – индексы Пааше, Лоу, гармонический индекс Ласпейреса,
- среднего взвешенного геометрического – геометрические индексы Ласпейреса, Пааше и Янга, индексы Торнквиста, Монтгомери-Вартиа, Сато-Вартиа.

При расчете некоторых индексов могут использоваться два метода усреднения – индексы Фишера, Дробиша.

Веса, применяемые для взвешивания относительных изменений цен или количеств, могут определяться:

– по данным за базисный период,

– по данным за сравниваемый период,

– в виде среднего из данных, относящихся к сравниваемому и базисному периодам.

При расчете весов усреднение данных может проводиться по формулам:

- среднего арифметического – индексы Маршалла-Эджворта, Торнквиста
- среднего гармонического – индекс Гири-Камиса
- среднего геометрического – индекс Уолша
- среднего логарифмического – индексы Монтгомери-Вартиа, Сато-Вартиа

2.1.1. ИНДЕКСЫ КОРЗИННОГО ТИПА (basket-type indices)

АССИМЕТРИЧНЫЕ ИНДЕКСЫ

Индекс цен Ласпейреса (Laspeyres price index):

$$I_{pL}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \frac{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_0}}{\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_0}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_{i1}}{p_{i0}} w_{i0} \,,$$

где $w_{i0} = \frac{p_{i0} q_{io}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}$.

Индекс цен Пааше (Paasche price index):

$$I_{pP}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \frac{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_1}}{\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i1}} = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)^{-1} w_{i1}\right]^{-1} ,$$

где $w_{i1} = \frac{p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}$.

<u>Индекс цен Палгрейва</u> (Palgrave price index) (Balk, 2008, P.63):

$$I_{pPA}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_{i1}}{p_{i0}} w_{i1}$$

<u>Гармонический индекс цен Ласпейреса</u> (harmonic Laspeyres price index):

$$I_{pHL}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)^{-1} w_{i0}\right]^{-1}$$

<u>Индекс цен Лоу</u> (Lowe price index):

$$I_{pLO}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{p_0}; \boldsymbol{q_b}) = \frac{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_b}}{\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_b}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{ib}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{ib}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_{i1}}{p_{i0}} w_{i,0b} \, ,$$

где $w_{i,0b} = \frac{p_{i0} q_{ib}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{ib}}$;

$\boldsymbol{q_b}$ – вектор количеств, относящийся к некоторому третьему периоду b.

<u>Индекс цен Янга</u> (Young price index):

$$I_{pY}(\boldsymbol{p_1}/\boldsymbol{p_0}; \boldsymbol{w_b}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_{i1}}{p_{i0}} w_{i,b} \,,$$

где $w_{i,b} = \frac{p_{ib}q_{ib}}{\sum_{i=1}^{n} p_{ib}q_{ib}}$.

СИММЕТРИЧНЫЕ ИНДЕКСЫ

<u>Индекс цен Маршалла-Эджворта</u> (Marshall-Edgeworth price index):

$$I_{pME}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \frac{\boldsymbol{p_1} \cdot \frac{(\boldsymbol{q_0}+\boldsymbol{q_1})}{2}}{\boldsymbol{p_0} \cdot \frac{(\boldsymbol{q_0}+\boldsymbol{q_1})}{2}},$$

где $\frac{(\boldsymbol{q_0}+\boldsymbol{q_1})}{\boldsymbol{2}}$ является вектором, в котором i-й компонент представляет собой среднее арифметическое значений q_{io} и q_{i1}.

<u>Индекс цен Уолша</u> (Walsh price index):

$$I_{pW}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \frac{\boldsymbol{p_1} \cdot (\boldsymbol{q_0}\boldsymbol{q_1})^{1/2}}{\boldsymbol{p_0} \cdot (\boldsymbol{q_0}\boldsymbol{q_1})^{1/2}},$$

где $(\boldsymbol{q_0}\boldsymbol{q_1})^{\boldsymbol{1/2}}$ является вектором, чья i-я компонента представляет собой среднее геометрическое q_{io} и q_{i1}.

Индекс цен Гири-Камиса (Geary-Khamis price index):

$$I_{pGK}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \frac{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{\bar{q}}}{\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{\bar{q}}} ,$$

где $\frac{1}{\bar{q}_i} = \left(\frac{1}{q_{i0}} + \frac{1}{q_{i1}}\right)/2$.

Индекс цен Дробиша (Drobisch price index) является средней арифметической индексов Ласпейреса и Пааше :

$$I_{pDR}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_0}}{\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_0}} + \frac{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_1}}{\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_1}}\right)$$

Индекс цен Фишера (Fisher price index) вычисляется путем взятия средней геометрической из индексов цен Ласпейреса и Пааше.

2.1.2. СРЕДНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ

Геометрический индекс цен Ласпейреса (geometric Laspeyres price index):

$$I_{pGL}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)^{w_{i0}} \quad ,$$

где $w_{i0} = \frac{p_{i0} q_{io}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}$.

Геометрический индекс цен Пааше (geometric Paasche price index):

$$I_{pGP}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)^{w_{i1}} \quad ,$$

где $w_{i1} = \frac{p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}$.

<u>Геометрический индекс цен Янга</u> (geometric Young price index):

$$I_{pGY}(\boldsymbol{p_1}/\boldsymbol{p_0};\boldsymbol{w_b}) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)^{w_{i,b}} \quad ,$$

где $w_{i,b} = \frac{p_{ib}q_{ib}}{\sum_{i=1}^{n} p_{ib}q_{ib}}$.

<u>Индекс цен Торнквиста</u> (Törnqvist–Theil price index), определяется как средняя геометрическая геометрических индексов Ласпейреса и Пааше:

$$I_{pT}(\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{q_1},\boldsymbol{p_0},\boldsymbol{q_0}) =$$

$$\sqrt{I_{pGL}(\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{q_1},\boldsymbol{p_0},\boldsymbol{q_0}) \times I_{pGP}(\boldsymbol{p_1},\boldsymbol{q_1},\boldsymbol{p_0},\boldsymbol{q_0})} = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)^{(w_{i0}+w_{i1})/2} \quad ,$$

где $w_{i0} = \frac{p_{i0}q_{io}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}q_{i0}}$ и $w_{i1} = \frac{p_{i1}q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i1}q_{i1}}$.

<u>Индекс цен Монтгомери-Вартиа</u> (Montgomery-Vartia price index):

$$\ln I_{pMV}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{p_{i1}q_{i1} - p_{i0}q_{i0}}{\ln p_{i1}q_{i1} - \ln p_{i0}q_{i0}}\right)}{\left[\frac{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_1} - \boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_0}}{\ln(\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_1}) - \ln(\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_0})}\right]} \times \ln\left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right) = \sum_{i=1}^{n} w_{i1}^{MV} \times \ln\left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right)$$

где $w_{i1}^{MV} = \frac{\left(\frac{p_{i1}q_{i1} - p_{i0}q_{i0}}{\ln p_{i1}q_{i1} - \ln p_{i0}q_{i0}}\right)}{\left[\frac{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_1} - \boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_0}}{\ln(\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_1}) - \ln(\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_0})}\right]}$, $\frac{p_{i1}q_{i1} - p_{i0}q_{i0}}{\ln p_{i1}q_{i1} - \ln p_{i0}q_{i0}}$ является логарифмической средней величин $p_{i0}q_{i0}$ и $p_{i1}q_{i1}$, и $\frac{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_1} - \boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_0}}{\ln(\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_1}) - \ln(\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_0})}$ является логарифмической средней величин $\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_1}$ и $\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_0}$.

<u>Индекс цен Сато-Вартиа</u> (Sato-Vartia price index):

$$\ln I_{pSV}(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \sum_{j=1}^{n} w_{i,1}^{*} \times \ln\left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right),$$

где $w_{i,1}^{*} = \frac{\frac{w_{i,1} - w_{i,0}}{\ln w_{i,1} - \ln w_{i,0}}}{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{w_{i,1} - w_{i,0}}{\ln w_{i,1} - \ln w_{i,0}}\right)}$, $w_{i0} = \frac{p_{i0} q_{io}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0} q_{i0}}$, и $w_{i1} = \frac{p_{i1} q_{i1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i1} q_{i1}}$.

2.2. ТЕСТЫ (АКСИОМЫ)

ТАБЛИЦА 1. СООТВЕТСТВИЕ ИНДЕКСОВ ЦЕН ОСНОВНЫМ ТЕСТАМ

Тест	Лас-пейрес	Пааше	Фишер	Лоу	Янг	Маршалл-Эджворт	Уолш	Торн-квист	Сато-Вартиа
Тест на положительность $I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) > 0$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Тест на непрерывность $I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$ непрерывная функция	+	+	+	+	+	+	+	+	
Тест на тождественность $I_p(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q_0}) = 1$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
Тест на однородность относительно цен сравниваемого периода $I_p(\lambda\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \lambda I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$	+	+	+	+	+	+	+	+	

Тест	Ласпейрес	Пааше	Фишер	Лоу	Янг	Маршалл-Эджворт	Уолш	Торнквист	Сато-Вартиа
Тест на однородность относительно цен базисного периода $I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \lambda \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \frac{1}{\lambda} I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$	+	+	+	+	+	+	+	+	
Тест перестановки товаров $I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = I_p(\boldsymbol{p_1}^*, \boldsymbol{q_1}^*, \boldsymbol{p_0}^*, \boldsymbol{q_0}^*)$ * обозначает перестановку товаров	+	+	+	+	+	+	+	+	
Инвариантность при изменении единиц измерения $I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = I_p(\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{\Lambda},\ \boldsymbol{q_1} \cdot \boldsymbol{\Lambda}^{-1},\ \boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{\Lambda},\ \boldsymbol{q_0} \cdot \boldsymbol{\Lambda}^{-1})$	+	+	+	+	+	+	+	+	

Тест	Лас-пейрес	Пааше	Фишер	Лоу	Янг	Маршалл-Эджворт	Уолш	Торн-квист	Сато-Вартиа
Тест на обратимость во времени $I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \frac{1}{I_p(\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}, \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1})}$	–	–	+	+	–	+	+	+	+
Тест на обратимость количеств $I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_0}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_1})$	–	–	+			+	+	–	
Тест на обратимость цен $\left(\frac{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_1}}{\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_0}}\right) / I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \left(\frac{\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_1}}{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_0}}\right) / I_p(\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_0})$	–	–	+				–	–	–?
Тест на среднее значение $\min_i \frac{p_{i1}}{p_{i0}} \le I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) \le \max_i \frac{p_{i1}}{p_{i0}}$	+	+	+	+	+	+	+	–** для количеств	

Тест	Лас-пейрес	Пааше	Фишер	Лоу	Янг	Маршалл-Эджворт	Уолш	Торн-квист	Сато-Вартиа
Тест на невыход за граничные значения Пааше и Ласпейреса $I_{pL} \le I_p \le I_{pP}$			+				–**	–**	–*
Тест на монотонность Если для всех товаров $p_{i1^*} \ge p_{i1}$ и хотя бы для одного товара i это неравенство строгое, то $I_p(\boldsymbol{p_{1^*}}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) > I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$	+	+	+	+	+	+	–**	–**	–*
Тест на циркулярность (транзитивность) $I_p(\boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{q_2}, \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}) \times I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = I_p(\boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{q_2}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$	–	–	–	+	–	–	–	–	–?

Тест	Лас-пейрес	Пааше	Фишер	Лоу	Янг	Маршалл-Эджворт	Уолш	Торн-квист	Сато-Вартиа
Тест на обратимость факторов $I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$ $\times I_p(\boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_0}, \boldsymbol{p_0}) = \frac{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_1}}{\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_0}}$	−	−	+			−***?		−	+
Тест на мультипликативность $\frac{\boldsymbol{p_1} \cdot \boldsymbol{q_1}}{\boldsymbol{p_0} \cdot \boldsymbol{q_0}} =$ $I_P(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$ $\times I_q(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$	+ в паре с I_{qP}	+ в паре с I_{qL}	+			−	−	−	+

* См.: Reinsdorf (2007, P. 21); Diewert (2008, P. 15).

** См.: (CPI Manual, 2004, para. 16.57 – 16.61)

*** См.: (Baldwin, 2004, P.2)

2.3. ТЕОРЕМЫ

Примеры:

<u>ТЕОРЕМА</u> (Funke, Hacker, and Voeller, 1979)

Индекс цен $I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$ удовлетворяет тесту на монотонность, тесту на линейную однородность, тесту на тождественность, тесту на инвариантность при изменении единиц измерения и тесту на циркулярность, если и только если он является геометрическим индексом Кобба – Дугласа (Cobb-Douglas index)

$$I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}\right)^{\alpha_i},$$

где $\alpha_i > 0$ и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

<u>ТЕОРЕМА</u> (Diewert, 1978)

Индекс цен Монтгомери-Вартиа дифференциально аппроксимирует со вторым порядком аппроксимации индекс цен вида

$$\ln I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{p_{i1}q_{i1}}{\boldsymbol{p_1}\cdot\boldsymbol{q_1}} + \frac{p_{i0}q_{i0}}{\boldsymbol{p_0}\cdot\boldsymbol{q_0}}\right]\ln\left(\frac{p_{i1}}{p_{i0}}\right),$$

в любой точке, где цены (и количества) для обоих периодов равны друг другу.

Индекс цен Торнквиста является индексом вышеприведенного вида. Поэтому индекс цен Торнквиста аппроксимируется формулой индекса цен Монтгомери-Вартиа.

Экономические индексы ориентированы на решение следующих практических задач:

- Усреднить относительные изменения во времени (или в пространстве) некоторого набора близких по смыслу переменных, характеризующих исследуемое явление (обычно изменения цен или физических количеств).

- Определить относительное изменение исследуемой переменной, которое произошло в силу изменений только одной из компонент этого изменения (обычно цен и физических количеств).

- Элиминировать из изменения исследуемой переменной одну из компонент этого изменения (например, посредством дефлятирования).

- Получить согласованные оценки краткосрочных и долгосрочных изменений, а также изменений от прошлого к будущему и наоборот.

Для успешного решения всех четырех задач особенно важны следующие свойства индексных формул:

- ♦ **Мультипликативность**

$$\frac{\boldsymbol{p_1 \cdot q_1}}{\boldsymbol{p_0 \cdot q_0}} = I_P(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) \times I_q(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$$

- ♦ **Циркулярность (транзитивность)**

$$I_p(\boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{q_2}, \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}) \times I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = I_p(\boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{q_2}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0})$$

- ♦ **Обратимость во времени**

$$I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) = \frac{1}{I_p(\boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}, \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1})}$$

- ♦ **Обратимость факторов**

$$I_p(\boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_0}, \boldsymbol{q_0}) \times I_p(\boldsymbol{q_1}, \boldsymbol{p_1}, \boldsymbol{q_0}, \boldsymbol{p_0}) = \frac{\boldsymbol{p_1 \cdot q_1}}{\boldsymbol{p_0 \cdot q_0}}$$

С точки зрения тестового подхода к двухсторонним индексам, идеальный индекс цен Фишера является наилучшим, ибо он удовлетворяет почти всем тестам, представленным в Таблице 1. Индекс Фишера не удовлетворяет только одному важному тесту – тесту на циркулярность.

Если мы будем рассматривать все тесты как равно-важные, то следующими в списке лучших индексов будут индексы Ласпейреса и Пааше. Однако, оба эти теста не проходят очень важный тест на обратимость во времени.

Индексы Уолша и Торнквиста оба удовлетворяют тесту на обратимость во времени, но индекс Уолша оказывается лучшим из этих двух, ибо он проходит большее число тестов (PPI Manual, 2004, para. 16.64). Индекс Торнквиста не проходит тест на обратимость факторов.

Индекс Сато-Вартиа для двухсторонних сопоставлений цен имеет впечатляющие аналитические свойства и широко используется в макроэкономическом анализе и международной торговле. Этот индекс удовлетворяет нескольким важным тестам, включая тест на обратимость во времени и тест на обратимость факторов. Индекс Сато-Вартиа используется в роли истинного индекса стоимости жизни (exact cost-of-living index, COLI) (Abe & Rao, 2019, P. 1-2).

ИЗ ПРАКТИКИ:

Статистические офисы должны решить, какой вид индекса им целесообразно рассчитывать. Во многих странах не ставят задачу расчета индекса стоимости жизни и предпочитают концепцию корзинного индекса цен.

(CPI Manual, 2004, para. 9.74-9.75).

На практике ИПЦ в большинстве случаев рассчитывается как взвешенное среднее значение процентных изменений цен для «корзины» потребительских продуктов с весами, отражающими относительную важность продукта в потреблении домашних хозяйств в некоторый период (CPI Manual, 2004, para. 1.3).

При первом расчете месячного ИПЦ единственные имеющиеся в наличии веса расходов неизбежно относятся к какому-то более раннему периоду или периодам времени. Это предопределяет форму индекса: ИПЦ (рассчитываемый на основе имеющихся в момент расчета данных) может представлять собой одну из форм индексов Лоу или Янга, в которых количества или расходы относятся к некоторому базисному (для весов) периоду b, предшествующему базисному (для цен) периоду 0.

Несколько позднее могут появиться оценки расходов как для базисного для цен периода o, так и для текущего периода t. Это дает возможность рассчитывать индексы типа Ласпейреса и Пааше, а также индексы Фишера и Торнквиста.

(CPI Manual, 2004, para. 1.272).

Если ИПЦ предназначен быть индексом стоимости жизни, то теоретически обоснованными будут индексы Фишера, Уолша или Торнквиста, поскольку такие индексы могут оказаться способными аппроксимировать индекс стоимости жизни

(CPI Manual, 2004, para. 9.74).

Руководство по ИПЦ 2004 года включало обширные теоретические главы. Теоретические главы опущены в обновленной версии руководства, которое сфокусировано на предоставлении инструкций по наилучшей практике в отношении принципов и методов формирования ИПЦ.

Будет отдельно выпущена ассоциированная публикация, фокусирующаяся на теоретических основаниях ИПЦ. Эта публикация под названием «Price Index Theory» даст обзор концептуальных и теоретических вопросов, обусловливающих методы и практику.

(CPI Manual 2020, P. ix)

3. СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Допустим, что каждое относительное изменение цен, $\frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}}$, случайным образом берется из всей совокупности относительных изменений цен, среднее значение которых по всей этой совокупности представляет собой темп роста общей инфляции. Вероятность извлечения *i*-го относительного изменения цен можно принять равной среднему арифметическому из долей *i*-го товара в общей сумме расходов на все товары в периодах *t-1* и *t*.

В периоде *t-1* доля товара *i* в общей сумме расходов на все товары равна

$$w_{i,t-1} = \frac{p_{i,t-1}q_{i,t-1}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i,t-1}q_{i,t-1}}, \quad (3.1)$$

а в периоде *t* эта доля равна

$$w_{i,t} = \frac{p_{i,t}q_{i,t}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i,t}q_{i,t}}. \quad (3.2)$$

Отсюда, средняя арифметическая из этих двух долей, одна из которых относится к периоду t-1, а другая – к периоду t, равна:

$$\bar{w}_{i,t} = \frac{1}{2}\left(w_{i,t} + w_{i,t-1}\right). \quad (3.3)$$

Главная идея стохастического подхода состоит в том, что вариация во времени цены каждого товара может быть разделена на две компоненты: общая вариация цен всех товаров (индекс цен) и вариация, характерная для каждого конкретного товара. Математически это можно представить в следующем виде:

$$\ln\frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}} = \alpha + \varepsilon_i , \quad (3.4)$$

где α является логарифмом темпа роста инфляции, а ε_i является случайной переменной.

В рассмотрении взвешенного стохастического подхода к теории индексов я следую Clements and Izan (1987).

Допустим, что вариация величины ε_i обратно пропорциональна $\bar{w}_{i,t}$:

$$var\ \varepsilon_{it} = \frac{\lambda_t^2}{\bar{w}_{i,t}}. \quad (3.5)$$

Поскольку ε_{it} представляет собой изменение i-ой относительной цены, (3.5) означает: чем выше доля товара i в общей сумме расходов на все товары, тем теснее связь между изменением цены товара i и общей инфляцией. Другими словами, изменчивость (вариация) относительной цены на товар i снижается при увеличении важности этого товара в бюджете потребителя.

Пусть $\bar{\mathbf{W}}_{\boldsymbol{t}}$ – диагональная матрица, диагональными элементами которой являются $\bar{w}_{1,t}, \bar{w}_{2,t}, \dots, \bar{w}_{n,t}$.

Метод взвешенных наименьших квадратов можно использовать, когда нарушается допущение о постоянстве вариации ошибок, на котором зиждется обычный метод наименьших квадратов.

В векторной форме модель (3.4) имеет вид:

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{t}} = \alpha_t \boldsymbol{i} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{t}}\,, \quad (3.6)$$

где

$$\mathbf{D}_{\boldsymbol{t}} = \begin{bmatrix} ln\,\frac{p_{1,t}}{p_{1,t-1}} \\ ln\,\frac{p_{2,t}}{p_{2,t-1}} \\ \dots \\ ln\,\frac{p_{n,t}}{p_{n,t-1}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\boldsymbol{t}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \\ \dots \\ \varepsilon_{nt} \end{bmatrix}.$$

Применение метода взвешенных наименьших квадратов дает следующую оценку для α_t :

$$\hat{\alpha}_t = (\boldsymbol{i}'\overline{\mathbf{W}}_{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{i})^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{i}'\overline{\mathbf{W}}_{\boldsymbol{t}}\mathbf{D}_{\boldsymbol{t}}\ , \quad (3.7)$$

где $\boldsymbol{i}'$ является результатом транспонирования вектора $\boldsymbol{i}$.

Отсюда (после некоторых рассуждений) имеем:

$$\hat{\alpha}_t = \sum_{i=1}^{n}\left(ln\frac{p_{i,t}}{p_{i,t-1}}\right)\overline{w}_{i,t}\ . \quad (3.8)$$

Таким образом, оценкой темпа роста инфляции является взвешенное среднее логарифмов относительных изменений цен n товаров, где весом для относительного изменения цены каждого товара является доля расходов на этот товар в общей сумме расходов на все товары (Clements and Izan, 1987).

Говоря более точно, $\hat{\alpha}_t$ является оценкой логарифма инфляции.

4. ЭКОНОМИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Экономический подход к индексам своим появлением обязан А. А. Конюсу (1895–1990), сотруднику секции индексов и цен Конъюнктурного института при Наркомате финансов Союза ССР, руководимого Н. Д. Кондратьевым. А.А.

Конюс разработал теорию так называемого истинного индекса стоимости жизни.

4.1. ИНДЕКС ЦЕН, ПОЛУЧАЕМЫЙ ПРИ РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЬСКИХ РАСХОДОВ

Домашние хозяйства выбирают покупки потребительских товаров так, чтобы максимизировать функцию полезности $U(C)$, где C обозначает потребление домохозяйства, принимая цены товаров как данность.

Товары не являются совершенными субститутами друг друга. Поэтому C не является суммарным потреблением всех товаров. На самом деле, оно является обобщенным средним (generalized mean) потребления домохозяйством индивидуальных товаров.

Пусть множество товаров, обозначенных индексом i, распределено на отрезке [0,1]. Тогда обобщенное среднее величин c_i примет вид:

$$C = \left[\sum_{i=0}^{1} c_i^{(\eta-1)/\eta}\right]^{\eta/(\eta-1)}, \quad (4.1)$$

где c_i обозначает потребление товара i, а η есть эластичность замещения между двумя любыми товарами ($\eta > 1$).

Выразив (4.1) в виде определенного интеграла, имеем

$$C = \left[\int_0^1 c_i^{(\eta-1)/\eta}\, di\right]^{\eta/(\eta-1)}. \quad (4.2)$$

При рассмотрении проблемы оптимального размещения расходов на потребление между различными товарами я буду следовать Galí (2008) и Romer (2012).

Пусть есть домохозяйство, расходы которого равны S. Зная, что множество товаров, обозначенных индексом i, распределено на отрезке [0,1], можно записать:

$$\int_0^1 p_i c_i di \equiv S, \quad (4.3)$$

где p_i есть цена товара i.

Для максимизации C при данном уровне расходов S строится лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \left[\int_0^1 c_i^{(\eta-1)/\eta}\, di\right]^{\eta/(\eta-1)} - \lambda\left(\int_0^1 p_i c_i di - S\right). \quad (4.4)$$

Условием первого порядка для c_i является

$$C^{1/\eta} c_i^{-1/\eta} = \lambda p_i \quad (4.5)$$

для всех $i \in [0,1]$.

Отсюда, для любых двух товаров, i и j, можно записать:

$$c_i = c_j \left(\frac{p_i}{p_j}\right)^{-\eta}. \quad (4.6)$$

Подстановка (4.6) в (4.3) дает:

$$\int_0^1 p_i c_j \left(\frac{p_i}{p_j}\right)^{-\eta} di = c_j p_j^{\eta} \int_0^1 p_i^{1-\eta}\, di = S. \quad (4.7)$$

Пусть P обозначает $\left[\int_0^1 p_i^{1-\eta}\, di\right]^{\frac{1}{1-\eta}}$.

Тогда $\int_0^1 p_i^{1-\eta}\, di = P^{1-\eta}$, и уравнение (4.7) приобретает вид:

$$c_j p_j^{\eta} P^{1-\eta} = S. \quad (4.8)$$

Таким образом, для любого j,

$$c_j = \left(\frac{p_j}{P}\right)^{-\eta} C, \quad (4.9)$$

где

$$P = \left[\int_0^1 p_i^{1-\eta}\, di\right]^{\frac{1}{1-\eta}}. \quad (4.10)$$

C – это реальное потребление товаров, то есть, $C = \frac{S}{P}$.

Полезность $U(C)$ увеличивается по C, поэтому c_j является тем количеством товара j, потребляемым домохозяйством, которое максимизирует потребление домохозяйства C и полезность домохозяйства $U(C)$.

Далее, переписав (4.8), имеем:

$$w_j = \left(\frac{p_j}{P}\right)^{1-\eta}, \quad (4.11)$$

где $w_j = \frac{c_j p_j}{S}$ представляет собой долю расходов на товар j в общей сумме расходов.

Отсюда

$$P = p_j w_j^{\frac{1}{\eta - 1}}. \quad (4.12)$$

Используя (4.12) и учитывая, что p_j обеспечивают максимизацию C и U при заданном уровне расходов, изменение стоимости жизни в периоде t по сравнению с периодом t-1 можно выразить через изменение цен ($p_{j,t}/p_{j,t-1}$):

$$\frac{P_t}{P_{t-1}} = \frac{p_{j,t}}{p_{j,t-1}} \left(\frac{w_{j,t}}{w_{j,t-1}}\right)^{\frac{1}{\eta - 1}}. \quad (4.13)$$

Взятие геометрического среднего по всем товарам в уравнении (4.13) приводит к следующему индексу цен:

$$\frac{P_t}{P_{t-1}} = \frac{\tilde{p}_t}{\tilde{p}_{t-1}} \left(\frac{\widetilde{w}_t}{\widetilde{w}_{t-1}} \right)^{\frac{1}{\eta - 1}}, \quad (4.14)$$

где символ «тильда» (~) обозначает геометрическое среднее по всем товарам (Redding and Weinstein, 2020).

Заметим, что (4.14) опирается на предположение о постоянстве эластичности замещения (elasticity of substitution) между товарами, η.

4.2. ФОРМУЛА ИНДЕКСА СТОИМОСТИ ЖИЗНИ. ИНДЕКС ЦЕН САТО – ВАРТИЯ

Практическая проблема: эластичность замещения, η, обычно неизвестна. Для элиминирования η из уравнения (4.14) Redding и Weinstein (2019) взяли логарифмы обеих частей (4.13) и сделали перегруппировку:

$$\frac{\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)-\ln\left(\frac{p_{j,t}}{p_{j,t-1}}\right)}{\ln\left(\frac{w_{j,t}}{w_{j,t-1}}\right)}=\frac{1}{\eta-1}. \quad (4.15)$$

Умножив обе части этого уравнения на $(w_{j,t}-w_{j,t-1})$ и просуммировав по всем товарам, они получили:

$$\sum_{j=1}^{n}(w_{j,t}-w_{j,t-1})\frac{\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)-\ln\left(\frac{p_{j,t}}{p_{j,t-1}}\right)}{\ln\left(\frac{w_{j,t}}{w_{j,t-1}}\right)}=\frac{1}{\eta-1}\sum_{j=1}^{n}(w_{j,t}-w_{j,t-1}), \quad (4.16)$$

где n есть количество товаров.

Очевидно, что $\sum_{j=1}^{n} w_{j,t} = \sum_{j=1}^{n} w_{j,t-1} = 1$. Поэтому (4.16) эквивалентно следующему:

$$\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \sum_{j=1}^{n} w_{jt}^{*} \times \ln\left(\frac{p_{j,t}}{p_{j,t-1}}\right), \quad (4.17)$$

где

$$w_{jt}^{*} = \frac{\frac{w_{j,t}-w_{j,t-1}}{\ln w_{j,t}-\ln w_{j,t-1}}}{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{w_{j,t}-w_{j,t-1}}{\ln w_{j,t}-\ln w_{j,t-1}}\right)}. \quad (4.18)$$

В уравнении (4.17) выражение, представляющее собой изменение стоимости жизни ($\frac{P_t}{P_{t-1}}$), есть **индекс цен Сато – Вартия**.

Веса w_{jt}^{*} называются весами Сато – Вартиа.

Формула (4.17) для расчета индекса стоимости жизни не содержит эластичности замещения η. Благодаря этому, индекс стоимости жизни становится более просто вычисляемым.

Мой расчет по данным Росстата индекса Сато-Вартиа дал следующее:

ТАБЛИЦА 2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ИНДЕКСА ПОТРЕБИТЕЛЬСКИХ ЦЕН САТО-ВАРТИА ПО РОССИИ

	2016	2017	2018	2019
Индекс потребительских цен Сато-Вартиа (истинный индекс стоимости жизни)	…	…	104,1	102,8
Индекс потребительских цен Росстата (декабрь к декабрю предыдущего года)	105,4	102,5	104,3	103,0

ТАБЛИЦА 3

Индексы потребительских цен на товары и услуги в группировке классификатора индивидуального потребления по целям (КИПЦ) в соответствующем году

на конец периода, в % к декабрю предыдущего года

Код товара в группировке КИПЦ	Наименование групп и видов товаров (услуг)	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
0	ВСЕ ТОВАРЫ И УСЛУГИ	108.8	106.1	106.6	106.5	111.4	112.9	105.4	102.5	104.3	103.0
01	ПРОДУКТЫ ПИТАНИЯ И БЕЗАЛКОГОЛЬНЫЕ НАПИТКИ	114.2	102.8	106.7	106.0	116.4	114.8	104.2	100.7	105.3	102.7
01.1	Продукты питания	114.7	102.4	106.7	106.2	116.7	114.3	103.9	100.7	105.5	102.7
01.1.1	Хлебобулочные изделия и крупы (НД)	113.0	106.3	108.3	106.4	111.6	115.3	105.6	100.0	103.7	106.9
01.1.1.1.0	Рис	97.6	98.6	99.4	110.3	122.0	126.1	94.2	99.3	105.0	107.4
01.1.1.1.0.1	Рис шлифованный, кг	97.6	98.6	99.4	110.3	122.0	126.1	94.2	99.3	105.0	107.4
01.1.1.2	Мука и другие крупы	175.6	89.0	102.9	100.7	132.7	109.3	108.4	84.8	101.3	117.0
01.1.1.2.1	Мука	112.1	96.7	128.3	106.5	109.0	112.0	101.4	96.9	104.1	107.3
01.1.1.2.1.1	Мука пшеничная, кг	112.1	96.7	128.3	106.5	109.0	112.0	101.4	96.9	104.1	107.3

Источник: https://rosstat.gov.ru/price

ТАБЛИЦА 4. Структура потребительских расходов населения для расчета индекса потребительских цен в группировке классификатора индивидуального потребления по целям (КИПЦ) в соответствующем году

в процентах

Код товара в группировке КИПЦ	Наименование групп и видов товаров (услуг)	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
0	ВСЕ ТОВАРЫ И УСЛУГИ	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000	100.000
01	ПРОДУКТЫ ПИТАНИЯ И БЕЗАЛКОГОЛЬНЫЕ НАПИТКИ	29.531	29.189	28.772	29.755	30.635	30.761	30.564	30.625
01.1	Продукты питания	27.918	27.598	27.234	28.229	28.962	29.020	28.842	28.983
01.1.1	*Хлебобулочные изделия и крупы (НД)*	4.561	4.471	4.345	4.332	4.556	4.683	4.614	4.534
01.1.1.1.0	*Рис*	0.213	0.186	0.184	0.201	0.230	0.229	0.226	0.233
01.1.1.1.0.1	Рис шлифованный, кг	0.213	0.186	0.184	0.201	0.230	0.229	0.226	0.233
01.1.1.2	*Мука и другие крупы*	0.422	0.391	0.384	0.463	0.507	0.550	0.474	0.485
01.1.1.2.1	Мука	0.199	0.216	0.216	0.219	0.248	0.255	0.240	0.260
01.1.1.2.1.1	Мука пшеничная, кг	0.199	0.216	0.216	0.219	0.248	0.255	0.240	0.260
01.1.1.2.2	Крупа манная	0.019	0.021	0.021	0.021	0.024	0.028	0.026	0.026
01.1.1.2.2.1	Крупа манная, кг	0.019	0.021	0.021	0.021	0.024	0.028	0.026	0.026

Источник: https://rosstat.gov.ru/free_doc/new_site/prices/potr/tab-kipc.htm

Росстат не рассчитывает истинный индекс стоимости жизни, что не противоречит международным рекомендациям:

Статистические офисы должны решить, какой вид индекса им целесообразно рассчитывать. Во многих странах не ставят задачу расчета индекса стоимости жизни и предпочитают концепцию корзинного индекса цен (CPI Manual, 2004, para. 9.74-9.75).

Если же ИПЦ предназначен быть индексом стоимости жизни, то теоретически обоснованными будут индексы Фишера, Уолша или Торнквиста, поскольку такие индексы могут оказаться способными аппроксимировать индекс стоимости жизни (CPI Manual, 2004, para. 9.74).

Тем не менее, научные организации страны, такие как ВШЭ, могли бы рассчитывать индекс стоимости жизни.

4.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛАСТИЧНОСТИ ЗАМЕЩЕНИЯ ПО НАБЛЮДАЕМЫМ ДАННЫМ О ЦЕНАХ И ДОЛЯХ ТОВАРОВ В ОБЩИХ РАСХОДАХ

Опираясь на (4.12) Redding и Weinstein (2019) вывели, что

$$\eta = 1 + \frac{\sum_{j=1}^{n}\left\{w_{jt}^{*}\left(\ln\frac{w_{j,t}}{w_{j,t-1}} - \ln\frac{\widetilde{w}_{t}}{\widetilde{w}_{t-1}}\right)\right\}}{\sum_{j=1}^{n} w_{jt}^{*}\left(\ln\frac{\widetilde{p}_{t}}{\widetilde{p}_{t-1}} - \ln\frac{p_{j,t}}{p_{j,t-1}}\right)}. \qquad (4.19)$$

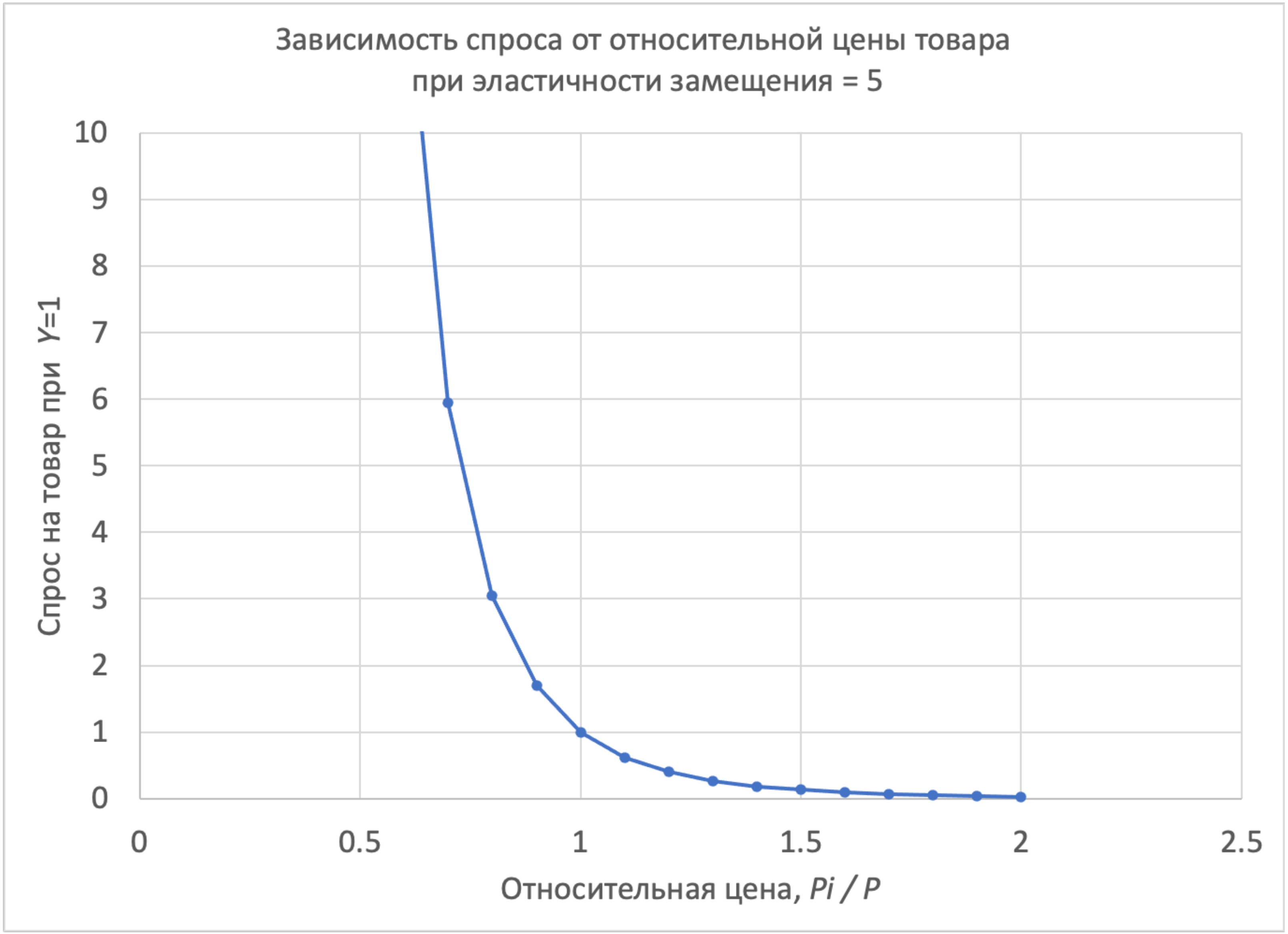
В уравнении (4.19) эластичность замещения, η, определяется по данным о наблюдаемых изменениях цен и долях товаров в общих расходах домашних хозяйств. Уравнение (4.19) можно использовать для вычисления эластичности замещения.

Мой расчет эластичности замещения по данным Росстата за 2019 и 2018 годы (таблицы 3 и 4) дал следующий результат:

$$\eta = 5{,}15$$

Этому значению эластичности соответствует довольно крутая кривая зависимости спроса от относительной цены, представленная на рис. 1.

Это предварительный результат, необходима дальнейшая работа по его проверке и анализу.



Зависимость спроса от относительной цены товара
при эластичности замещения = 5
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
Спрос на товар при Y=1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
Относительная цена, Pi / P

Рис. 1

5. ГЕДОНИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Гедоническое моделирование используется для построения индексов цен, в которых отсутствует компонента, обусловленная изменением качества сравниваемых товаров.

В странах региона при построении ИПЦ гедоническое моделирование почти не используется.

Это неотвратимо снижает качество рассчитываемых индексов цен и, как следствие, качество индексов физического объема.

Согласно статистическим стандартам, изменение качества товаров является составляющей изменения физического объема.

Для сопоставления цен в двух периодах необходимо, чтобы качество каждого продукта оставалось одинаковым в течение этих периодов. На практике же качество потребляемого товара изменяется.

Изменения цен возникают под действием ряда факторов, включая изменения качества, изменения вкусов и предпочтений, а также изменения технологии производства. Цель заключается в том, чтобы определить, какая часть общего изменения цены является результатом изменения качества, а какая представляет собой чистое изменение цены. Необходимо оценить, в какой степени различие в качестве между старым и новым продуктами отразилось на цене, чтобы затем можно было сравнивать цены на одинаковые качества.

(Consumer Price Index Manual, 2004, para. 7.21 – 7.24).

Rosen (1974) отмечал, что товары могут рассматриваться как набор взаимосвязанных характеристик. Класс товаров может быть описан K объективно измеренными свойствами или характеристиками,

$$\boldsymbol{z} = (z_{i1,t}, \quad z_{i2,t}, \quad \cdots, \quad z_{iK,t,}).$$

Внутри каждого класса имеется "спектр продуктов" среди которых может быть сделан выбор.

Каждый продукт имеет цену, и каждый продукт ассоциирован с определенным значением вектора $\boldsymbol{z}$, так что товарные рынки неявно выявляют функцию $p(z)$, связывающую цены и характеристики товаров (Rosen, 1974, P. 37):

$$p_{i,t} = p(z_{i1,t}, \quad z_{i2,t}, \quad \dots, \quad z_{iK,t}), \quad t = 0, 1, \dots, T, \quad (5.1)$$

то есть, цена $p_{i,t}$ товара i в период t является функцией фиксированного количества характеристик, скажем, K характеристик, измеряемых “количествами” $z_{ik,t}$.

Однако, рынка характеристик не существует, ибо они не могут продаваться по отдельности, поэтому цены характеристик не могут наблюдаться по отдельности.

Метод гедонической регрессии (hedonic regression method) основан на допущении, что цена товара i может быть выражена как:

$$p_{i,t} = f(z_{i1,t}, \quad z_{i2,t}, \quad \dots, \quad z_{iK,t}, \quad \varepsilon_{i,t}), \quad t = 0, 1, \dots, T, \quad (5.2)$$

где характеристики измерены “количествами” $z_{ik,t}$, и $\varepsilon_{i,t}$ обозначает случайную ошибку (белый шум).

[Handbook on Residential Property Prices Indices (RPPIs), para. 5.2 – 5.5].

Метод регрессии помогает определить зависимость меду p и z-ами в уравнении (5.2). Два наиболее известных уравнений гедонической регрессии являются линейными моделями:

линейная модель

$$p_{i,t} = \beta_{0t} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{kt}\, z_{ik,t} + \varepsilon_{i,t} \qquad (5.3)$$

и логарифмически-линейная модель

$$\ln p_{i,t} = \beta_{0t} + \sum_{k=1}^{K} \beta_{kt}\, z_{ik,t} + \varepsilon_{i,t} \qquad (5.4)$$

где β_{0t} и β_{kt} – соответственно свободные члены и параметры регрессии при характеристиках z, значения которых необходимо оценить; эти параметры могут изменяться во времени (RPPIs, para. 5.2, 5.4).

На практике, многие независимые (объясняющие) переменные z_i могут быть категориальными, а не непрерывными, и могут быть представлены набором условных переменных (dummy variables), которые приобретают значение 1 в том случае, если характеристика относится к интересующей исследователя категории (например, определенному периоду времени), и значение 0 в обратном случае.

Оценку значений параметров β_{0t} и β_{kt} можно сделать с использованием эконометрических или статистических компьютерных программ, ибо они содержат диагностические тесты, помогающие судить, насколько удовлетворительной является построенная модель.

На мой взгляд, использование методов гедонической регрессии при построении официальных индексов цен является НЕОБХОДИМОСТЬЮ.

Только в этом случае возможен качественный расчет всей системы индексов цен и физических объемов.

В настоящее время гедоническую регрессию вряд ли удастся заменить какими-то иными методами.

Литература:

1. **Abe, Naohito & Rao, D.S. Prasada. 2019.** Multilateral Sato-Vartia Index for International Comparisons of Prices and Real Expenditures. RCESR Discussion Paper Series No. DP19-1 (July).

2. **Baldwin, Andrew. 2004.** Chain Price and Volume Aggregates for the System of National Accounts. Statistics Canada, [Online]. Available at: http://www.ipeer.ca/papers/Baldwin,A.,June1,formulachoicenova6.pdf [Accessed 31 July 2020].

3. **Balk, Bert M. 2008.** *Price and Quantity Index Numbers: Models for Measuring Aggregate Change and Difference.* New York: Cambridge University Press.

4. **Bowley, Arthur L. 1907.** *Elements of Statistics*. London: P.S. King & Son.

5. **Clements, Kenneth W., Izan H.Y. 1987.** "The Measurement of Inflation: A Stochastic Approach." *Journal of Business & Economic Statistics*, vol. 5, no 3 (July).

6. Consumer Price Index Manual: Theory and Practice – Geneva: International Labour Office, 2004.

7. Consumer Price Index Manual: Concepts and Methods – Washington, D.C.: International Monetary Fund, 2020.

8. **Diewert, W. Erwin. 2008.** Index Numbers. Palgrave Macmillan (ed.), The New Palgrave Dictionary of Economics.

9. **Diewert, Erwin W. 1978**. Superlative Index Numbers and Consistency in Aggregation. *Econometrica* 46(4), pp. 883-900.

10. **Funke, H., Hacker, G., Voeller, J. 1979.** "Fisher's Circular Test Reconsidered". *Swiss Journal of Economics and Statistics (SJES)* 115, p.p. 677-688.

11. **Galí, Jordi. 2008**. *Monetary Policy, Inflation, and the Business Cycle: An Introduction to the New Keynesian Framework.* Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

12. Handbook on Residential Property Prices Indices (RPPIs) – Luxembourg: Publication Office of the European Union, 2013.

13. Producer Price Index Manual: Theory and Practice – Washington, D.C.: International Monetary Fund, 2004.

14. **Redding Stephen J., and Weinstein, David E. 2020.** "Measuring Aggregate Price Indices with Taste Shocks: Theory and Evidence for CES Preferences." *The Quarterly Journal of Economics*, vol. 135(1), pages 503-560.

15. **Redding Stephen J., and Weinstein, David E. 2019.** "Online Technical Appendix to "Measuring Aggregate Price Indexes with Taste Shocks: Theory and Evidence for CES Preferences." [Online]. Available at: https://www.princeton.edu/~reddings/papers/CES_22Sep2019_QJE_appendix.pdf [Accessed 21 May 2020].

16. **Reinsdorf, Marshall. 2007.** Axiomatic Price Index Theory. International Monetary Fund.

17. **Rosen, Sherwin. 1974.** "Hedonic Prices and Implicit Markets: Product Differentiation in Pure Competition." *The Journal of Political Economy*, Vol. 82, No. 1. (Jan. - Feb), pp. 34-55.

18. **Romer, David. 2012.** *Advanced Macroeconomics*. 4rd edition. New York: McGraw-Hill / Irwin.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!