Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Трифонов Юрий Сергеевич

Ослабление предпосылок о распределении случайных шоков в обобщенных авторегрессионных моделях условной гетероскедастичности

РЕЗЮМЕ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата экономических наук

Научный руководитель:
Доцент, кандидат экономических наук
Потанин Богдан Станиславович
JEL: C18, C22, C58

Москва – 2024

1 Предпосылки о распределении как проблема оценивания авторегрессионных моделей условной гетероскедастичности

Одним из основных показателей, характеризующих поведение активов на финансовых рынках, является волатильность. Данный показатель обычно выражается как стандартное отклонение доходности рассматриваемых финансовых инструментов и является индикатором уровня риска активов или портфеля ценных бумаг в совокупности (Markowitz, 1952) (Sharpe, 1964). По этой причине различные участники финансового рынка являются заинтересованными в моделировании волатильности с целью измерения уровня риска активов, а также проведения эффективной политики риск-менеджмента. В частности, моделирование волатильности является неотъемлемой частью процесса хеджирования, моделей ценообразования опционов и других областей финансов (Miralles-Marcelo et al., 2013).

Одним из наиболее широко применяемых методов моделирования условной волатильности на финансовых рынках является класс обобщенных авторегрессионных моделей условной гетероскедастичности (GARCH), впервые предложенный Bollerslev (1986) на основе работы (Engle, 1982). Данное семейство моделей является достаточно гибким за счет ослабления предпосылки о постоянстве условной дисперсии во времени, благодаря чему успело продемонстрировать серьезное преимущество при применении к финансовым временным рядам в сравнении с классическими линейными моделями временных рядов класса ARFIMA. Однако, как и любой эконометрический инструментарий, данный класс моделей основывается на ряде предпосылок, часть из которых зачастую плохо согласуется с наблюдаемыми эмпирическими закономерностями и финансовой теорией. При этом, в результате нарушения данных предпосылок оценки могут не обладать необходимыми свойствами, что, в свою очередь, может приводить к серьезному снижению точности оценок и прогнозов как условной волатильности, так и доходности.

Данное диссертационное исследование концентрируется на ослаблении двух типов предпосылок, приводящих к проблеме ошибок спецификации в моделях семейства GARCH.

Во-первых, рассматривается проблема необходимости предпосылок о конкретной форме распределения случайных шоков в уравнении доходности при оценивании GARCH моделей. Обычно модели семейства GARCH оцениваются при помощи метода максимального правдоподобия, что требует предположений о виде функции плотности случайных шоков при спецификации функции правдоподобия. Классическая GARCH модель основывается на предпосылке о нормальности случайных шоков в уравнении доходности активов. Однако данная предпосылка зачастую является нереалистичной. При этом, несмотря на наличие свидетельств в пользу того, что оценки в GARCH моделях остаются состоятельными даже в случае отклонения от нормальности (Bollerslev & Wooldridge, 1992), ошибочная спецификация распределения обычно приводит к существенной потере в эффективности оценок (Feng & Shi, 2017). Так во многих эмпирических исследованиях были найдены свидетельства в пользу отклонения распределения шоков от нормального в финансовых временных рядах. На практике, как правило, исследователи наблюдают наличие явно выраженных «тяжелых»[1] хвостов, а также скошенности в распределении (Trifonov & Potanin, 2022). Более того, некоторые исследования обнаруживали и более серьезные отклонения от нормальности. Например, при исследовании волатильности акций во время британских выборов в 1987, 1992 и 1997 годах, Gemmill & Saflekos (2000) обнаружили статистические свидетельства в пользу бимодального распределения шоков. Исследователи связывали наличие мультимодальной структуры с тем, что выборы могли закончиться победой как лейбористов, так и консерваторов, и каждое из этих событий порождало различное распределение шоков. По этой причине, в некоторых случаях целесообразным является формирование предположений о нетривиальной форме распределения на основе анализа конкретных рыночных условий. Однако в общем случае невозможно гарантировать учет исследователями всех фактов, определяющих распределение случайных шоков. Это мотивирует использование гибких распределений при оценивании GARCH моделей, позволяющих учитывать отклонения от нормальности без необходимости проведения нетривиального предварительного анализа финансовых рыночных условий (Trifonov & Potanin, 2022).

Второй тип рассматриваемых предпосылок затрагивает проблему спецификации премии за

[1] В данном диссертационном исследовании в качестве распределений с «тяжелыми» хвостами рассматриваются такие распределения, для которых выполнено, что $\mathbb{E}[e^{tX}] = \infty,\ \forall t > 0$. Т.е. такие распределения, у которых хвосты являются более «тяжелыми», чем у экспоненциального распределения.

риск в моделях семейства GARCH-in-Mean (GARCH-M). Данный класс моделей был впервые предложен в работе (Engle et al., 1987), и его основной особенностью является учет компоненты премии за риск в уравнении доходности. Эта особенность повлекла за собой широкое применение данного семейства моделей в эмпирических исследованиях. Однако в своей работе Bollerslev (2022) указал на множественные несогласующиеся с финансовой теорией результаты в ряде эмпирических исследований (см. (Bollerslev et al., 2006), (Hong & Linton, 2020), (Rossi & Timmermann, 2015)), использовавших семейство GARCH-M для моделирования премии за риск в доходностях финансовых активов. Согласно Bollerslev (2022), эмпирические исследования получали противоречивые результаты, поскольку знак оценки премии за риск являлся неустойчивым как при рассмотрении различных временных периодов, так и для разных активов. При этом Bollerslev (2022) предположил, что причиной подобной несогласованности результатов при применении модели GARCH-M может являться невозможность учета моделью асимметричной зависимости между шоками в доходности и динамикой премии за риск. Поскольку классическая GARCH-M модель является симметричной, она не способна улавливать данный эффект при моделировании премии за риск. По этой причине, наложение нереалистичной предпосылки о симметричной взаимосвязи между премией за риск и шоками в доходности может приводить к несостоятельности оценок премии за риск из-за возникновения ошибки спецификации. Проблема необходимости учета эффекта асимметрии при моделировании премии за риск связана с существованием стилизованного факта о том, что инвесторы склонны запрашивать более высокую премию за риск в случае, когда волатильность вызвана отрицательными шоками в доходности («плохая [bad] волатильность»), чем когда она формируется при восходящем тренде на рынке («хорошая [good] волатильность») (Bollerslev, 2022)(Trifonov & Potanin, 2024). Таким образом, проблема симметричной природы GARCH-M мотивирует разработку нового класса асимметричных GARCH-M моделей, позволяющих дифференцировать вклад «хороших» и «плохих» периодов волатильности при формировании премии за риск с целью получения ее состоятельных оценок. Кроме того, интерес представляет и непосредственное изучение самого механизма, обуславливающего соответствующую асимметрию, поскольку он отражает различные поведенческие особенности инвесторов на финансовых рынках.

2 Краткий обзор литературы, посвященной проблеме ошибок спецификации в авторегрессионных моделях условной гетероскедастичности в результате нарушения предпосылок

2.1 Нарушение предпосылок о распределении случайных шоков

Обычно с целью ослабления предпосылки о нормальности, исследователи оценивают модели семейства GARCH при рассмотрении различных распределений случайных шоков. Далее наиболее подходящее распределение выбирается на основе некоторых критериев валидации, таких как корень средней квадратичной ошибки (RMSE), информационный критерий Акаике (AIC), Байесовский информационный критерий (BIC), а также критерий Ханна-Куина (HQC).

В качестве наиболее часто рассматриваемых распределений при оценивании GARCH моделей используются распределение Стьюдента, а также обобщенное нормальное распределение (GED), так как данные виды распределений характеризуются наличием «тяжелых» хвостов, которые часто наблюдаются в доходностях финансовых инструментов (Feng & Shi, 2017). В качестве более гибких альтернатив стоит выделить применение нецентрального распределения Стьюдента, а также обобщенного нецентрального распределения Стьюдента. Данные виды распределений помимо наличия «тяжелых» хвостов также позволяют улавливать скошенную структуру распределения, которая часто наблюдается на реальных данных (Feng & Shi, 2017). Несмотря на то, что использование данных распределений позволяет ослабить предпосылку о нормальности, соответствующий подход является параметрическим и требует наложения предпосылок о конкретной форме функции плотности.

Упомянутые причины привели к развитию нового направления в литературе, посвященного развитию более гибких методов оценивания моделей семейства GARCH. Так одной из наиболее популярных альтернатив является применение ядерного оценивания функции плотности при оценивании моделей с помощью метода максимального правдоподобия. В качестве подобных подходов можно выделить KDE-GARCH и Bayesian-KDE-GARCH модели, предложенные Wang et al. (2020) и Zhang & King (2013) соответственно. Оба данных подхода обладают сравнительным преимуществом в виде отказа от предпосылок о распределении при спецификации функции правдоподобия, так как предполагаемый вид функции плотности заменяется на ее ядерную оценку. Тем не менее, данные непараметрические методы обладают существенным недостатком в виде сложности подбора ширины окна при реализации ядерного оценивания. Кроме того, данный подход характеризуется высокой сложностью вычислительной задачи, что значительно увеличивает как временные издержки, так и требования к вычислительным ресурсам при практической имплементации (Zhang & King, 2013).

Данное диссертационное исследование вносит вклад в описанный пласт литературы за счет того, что предлагает две полунепараметрические спецификации GARCH модели. Предложенные методы позволяют отказаться от наложения предпосылок о конкретной форме распределения случайных шоков и при этом характеризуются значительно менее сложной оптимизационной задачей в сравнении с применением ядерного оценивания.

2.2 Нарушение предпосылок при моделировании премии за риск

Обширное применение моделей семейства GARCH для анализа финансовых временных рядов стимулировало развитие нового направления в литературе, посвященного разработке различных модификаций рассматриваемых моделей. Спрос на новые методы обуславливался необходимостью ослабления предпосылок в классической модели с целью ее адаптации к моделям финансовой экономики, а также для возможности учета стилизованных фактов, присущих финансовом рынкам (Nelson, 1991).

Согласно основным портфельным теориям Markowitz (1952) и Sharpe (1964), ключевыми факторами, описывающими ценообразование на финансовых рынках, являются доходность и волатильность. При этом волатильность является основной мерой риска финансовых активов и имеет положительную корреляцию с показателем доходности. Таким образом, инвесторы на финансовых рынках запрашивают более высокую ожидаемую доходность, когда актив является более волатильным. Данная концепция ложится в основу ключевого принципа ценообразования на финансовых рынках. Этот принцип утверждает, что каждый рискованный актив содержит в своей доходности компоненту премии за риск, которая изменяется в зависимости от уровня риска актива. Поскольку классические GARCH модели не позволяли учитывать наличие премии за риск в уравнении доходности актива, это привело к разработке нового класса моделей, именуемого GARCH-M (Engle et al., 1987). Данный класс моделей позволяет моделировать изменяющуюся во времени премию за риск в уравнении доходности активов. Несмотря на то, что данный метод позволяет учитывать компоненту премии за риск, ее симметричная спецификация не позволяет учитывать стилизованный факт об асимметричной зависимости между премией за риск и шоками в доходности активов (Bollerslev, 2022).

В то время как концепция эффекта асимметрии является новой в контексте модели GARCH-M, она была обширно изучена в рамках классической GARCH модели. Существует достаточно большой пласт литературы, описывающей присутствующий на финансовых рынках эффект рычага. Данный эффект выражается в наличии асимметричной реакции условной волатильности на шоки в доходности. В частности, существует широко известный стилизованный факт о том, что волатильность реагирует более инерционно на отрицательные шоки в доходности, чем на положительные (Black, 1976)(Zhang, 2006). В литературе были предложены несколько подходов к объяснению данного эффекта. Согласно Black (1976) и Christie (1982), отрицательные шоки приводят к увеличению финансового рычага компаний-эмитентов, что, в свою очередь, стимулирует рост их уровня риска и увеличение волатильности на рынке. Кроме того, согласно теории перспектив Kahneman & Tversky (1979), эффект асимметрии может возникать вследствие когнитивных особенностей инвесторов. Индивиды склонны более критично воспринимать убытки и, следовательно, отрицательные шоки могут приводить к массовой продаже активов инвесторами, тем самым вызывая рост волатильности на рынке. Так как классическая GARCH модель является симметричной, то она не позволяет улавливать подобный эффект (Nelson, 1991). Данная проблема привела к развитию новых классов асимметричных GARCH моделей, позволяющих улавливать эффект асимметрии в уравнении условной дисперсии. Наиболее известными представителями данного класса моделей являются GJR-GARCH (Glosten et al., 1993) и EGARCH (Nelson, 1991). Стоит отметить, что современные исследования в основном концентрируются на развитии более гибких асимметричных функциональных форм уравнения условной дисперсии (Hansen et al., 2012), а также на обобщении асимметричных модификаций на многомерный случай (McAleer et al., 2009). Однако концепция учета эффекта рычага в премии за риск (эффекта асимметрии в уравнении доходности GARCH-M модели) является малоизученной в литературе (Trifonov & Potanin, 2024).

Данное диссертационное исследование вносит вклад в устранение данного пробела в литературе за счет разработки нового метода, позволяющего учитывать эффект рычага в уравнении премии за риск. Предлагаемый в исследовании метод обеспечивает учет стилизованного факта о том, что отрицательные шоки в доходности активов оказывают более сильный вклад в формирование премии за риск (через рост волатильности), чем положительные шоки. Иными словами, предлагаемая модель позволяет дифференцировать хорошие и плохие периоды волатильности при оценивании премии за риск за счет включения в уравнение доходности дополнительной компоненты с индикаторной функцией, улавливающей асимметричные отклики премии за риск на изменения условной волатильности. Отметим, что данный эффект также имеет интерпретацию с точки зрения поведенческих финансов и объясняется нарушением предпосылки об иррациональности инвесторов на рынке (Bollerslev, 2022). Таким образом, инвесторы склонны по разному воспринимать волатильность вызванную периодами подъема и спада в силу психоэмоциональных факторов, что отражается на их поведении относительно формирования премии за риск. Предлагаемая в данном исследовании модель позволяет учитывать соответствующий эффект.

3 Цели и задачи исследования

В роли объекта диссертационного исследования выступают обобщенные авторегрессионные модели условной гетероскедастичности в контексте моделирования условной волатильности на финансовых рынках. Предметом исследования являются нереалистичные предпосылки в моделях данного семейства (ошибки спецификации). В свою очередь, цель исследования заключается в разработке новых методов, позволяющих ослабить данные предпосылки. Для достижения поставленной цели были определены следующие задачи.

1. Сформулировать спецификации полунепараметрических SNP-GARCH и SPL-GARCH

моделей, основанных на аппроксимации неизвестной функции плотности случайных шоков с помощью метода, предложенного Gallant & Nychka (1987), а также используя модификацию данного подхода, основанную на сплайнах.

2. Предложить и описать спецификацию нового семейства асимметричных GARCH-M моделей, способных учитывать эффект асимметрии в премии за риск за счет расширения функциональной формы GJR-GARCH модели на уравнение доходности актива.

3. Исследовать свойства оценок предложенных методов, а также провести сравнительный анализ с существующими аналогами с помощью численных экспериментов Монте-Карло.

4. Аппробировать предложенные методы на реальных данных о доходности Битоина, значениях индекса S&P500, а также величинах крупнейших российских фондовых индексов.

4 Научная новизна исследования

В рамках данного диссертационного исследования был осуществлен следующий вклад в развитие эконометрической методологии оценивания обобщенных авторегрессионных моделей условной гетероскедастичности:

1. Предложены две полунепараметрические модификации GARCH модели. Первая из них, именуемая PGN-GARCH, основана на приближении неизвестной функции плотности шоков с помощью метода Gallant & Nychka (1987). Вторая модификация, именуемая SPL-GARCH, отличается от первой тем, что в выражении, используемом для аппроксимации функции плотности, вместо полиномов используются сплайны.

2. Был предложен новый класс асимметричных GARCH моделей, названный GARCH-M-GJR-LEV, позволяющий ослабить предпосылку о симметричночной рекации премии за риск на положительные и отрицательные шоки в моделях класса GARCH-M. Предложенное семейство моделей позволило дифференцировать вклад «хороших» и «плохих» периодов волатильности в формирование премии за риск.

3. Был проведен анализ симулированных данных, результаты которого говорят о том, что в большинстве рассмотренных случаев предложенные подходы превосходят существующие аналоги. Во-первых, модели PGN-GARCH и SPL-GARCH продемонстрировали преимущество в точности оценивания параметров GARCH модели и волатильности над классическими и ядерным подходами. Особенно явно данное преимущество наблюдалось в случаях, когда случайные шоки были симулированы из бимодальных распределений. Во-вторых, модель GARCH-M-GJR-LEV продемонстрировала серьезное преимущество над GARCH, GJR-GARCH и GJR-GARCH-M моделями в точности оценивания волатильности и доходности при наличии эффекта асимметрии в премии за риск. Кроме того, была продемонстрирована устойчивость данного подхода к нарушению предпосылки о нормальном распределении случайных шоков.

4. Предложенные методы были апробированы на реальных данных. Предложенная GARCH-M-GJR-LEV модель позволила получить статистические свидетельства в пользу наличия ассиметричного влияния дисперсии на доходность активов на данных индекса S&P500, а также на данных крупнейших российских фондовых индексов. Модели PGN-GARCH и SPL-GARCH продемонстировали сопоставимое с существующими аналогами[2] качество моделирования волатильности Биткоина.

5 Результаты диссертационного исследования, выносимые на защиту

Ключевым результатом диссертационного исследования являются предложенные модификации GARCH модели. В разделе 5.3 описываются предложенные PGN-GARCH и SPL-GARCH модели, а в разделах 5.1 и 5.2 – распределения, используемые в данных моделях. Раздел 5.4 посвящен описанию предложенной GARCH-M-GJR-LEV модели.

[2]В качестве аналогов помимо классической GARCH модели рассматривались методы, предполагающие, что случайные шоки следуют скошенному обобщенному распределению ошибок (SGED-GARCH) или скошенному распределению Стьюдента (SSTD-GARCH), а также модель, в которой распределение случайных ошибок аппроксимировалось с помощью ядерного оценивания (KDE-GARCH).

5.1 PGN-распределение

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbb{P})$ определена случайная величина X, имеющая PGN-распределение K-го порядка с вектором параметров $\tau = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_K)$. Тогда ее функция плотности имеет вид (Trifonov & Potanin, 2022) (Gallant & Nychka, 1987):

$$f_X(x;\tau) = f_X(x) = \frac{\left(\tau_0 + \tau_1 x + \tau_2 x^2 + \ldots + \tau_K x^K\right)^2}{\sum_{i=0}^{K}\sum_{j=0}^{K}\tau_i\tau_j M(i+j)}\phi\left(x\right),$$

где $\phi(x)$ и $M(i+j)$ являются функцией плотности и $(i+j)$-ым моментом стандартного нормального распределения соответственно. Знаменатель обеспечивает выполнение условия нормировки: равенство интеграла $f_X(x)$ единице на всей области определения $\mathbb{R}$. Числитель содержит полином K-го порядка, который обеспечивает «гибкость» распределения.

Несложно показать, что моменты данного распределения всегда конечны и имеют следующий вид (Trifonov & Potanin, 2022) (Gallant & Nychka, 1987):

$$\mathbb{E}(X^k) = \frac{\sum_{i=0}^{K}\sum_{j=0}^{K}\tau_i\tau_j M(i+j+k)}{\sum_{i=0}^{K}\sum_{j=0}^{K}\tau_i\tau_j M(i+j)}, k \in \mathbb{N}.$$

Согласно (Gallant & Nychka, 1987), широкий класс распределений может быть приближен распределением данного вида с нужной точностью при увеличении степени полинома K. Поэтому, если проводится оценка параметров какой-либо модели, можно заменить неизвестную функцию плотности на $f_X(x)$ и увеличивать K вместе с размером выборки для обеспечения состоятельности (Gallant & Nychka, 1987). В текущем диссертационном исследовании данная идея применяется для оценки параметров моделей семейства GARCH, ослабляя предпосылку о том, что случайные шоки в доходности подчиняются конкретному закону распределения.

5.2 SPL-распределение

Функция плотности SPL случайной величины является схожей с PGN распределением. Отличием выступает то, что в основу плотности SPL распределения ложится сплайн вместо полинома (Trifonov & Potanin, 2022):

$$f_Y(x;\tau,\kappa) = f_Y(x) = \frac{\left(\tau_0 B_{0,K}\left(x\right) + \tau_1 B_{1,K}\left(x\right) + \ldots + \tau_{n_\kappa - K - 2} B_{n_\kappa - K - 2, K}\left(x\right)\right)^2}{\sum_{t=1}^{n_\kappa - 1}\sum_{i=0}^{K}\sum_{j=0}^{K}\eta_{i,t}\eta_{j,t}M_{TR}(i+j;\kappa_t,\kappa_{t+1})}\phi\left(x\right),$$

где $B_{i,K}$ являются B-сплайнами, а $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_{n_\kappa})$ обозначает вектор узлов. Также $M_{TR}(i+j;\kappa_t,\kappa_{t+1})$ является $(i+i)$-ым моментом стандартного нормального распределения, усеченного снизу и сверху κ_t и κ_{t+1} соответственно, где $\kappa_{t+1} \geq \kappa_t$. Кроме того, $\eta_{i,t}$ является коэффициентом перед x^i для сплайна (вычисленного как линейная комбинация B-сплайнов в числителе) на интервале $[\kappa_t, \kappa_{t+1})$. Таким образом, в качестве $\eta_{i,t}$ выступают константы, которые однозначно определяются через τ и κ.

Так как SPL-распределение определено на носителе $[\kappa_1, \kappa_{n_\kappa})$, очевидно, что стандартное нормальное распределение не принадлежит данному классу распределений. Однако несложно показать, что все усеченные (конечными числами сверху и снизу) стандартные нормальные распределения принадлежат к семейству SPL-распределений с параметрами $K = 0$ и $n_\kappa = 2$ (Trifonov & Potanin, 2022).

Отметим, что гибкость приведенной плотности обеспечивается за счет того, что любой сплайн степени K с вектором узлов κ может быть представлен в виде линейной комбинации $\eta_\kappa - K - 1$ B-сплайнов (de Boor, 1978, p.89). При этом данные сплайны могут быть легко рассчитаны за счет применения известного рекурентного соотношения (de Boor, 1978, p.89) (Trifonov & Potanin, 2022):

$$B_{i,0}\left(x\right) = \begin{cases} 1, \text{ если } \kappa_i \leq x < \kappa_{i+1}, \\ 0, \text{ иначе} \end{cases},$$

$$B_{i,K}\left(x\right) = g(x;i,K-1)B_{i,K-1} + \left(1 - g(x;i+1,K-1)\right)B_{i+1,K-1}, \text{ для } K \geq 1,$$

$$g(x;i,K) = \begin{cases} \frac{x-\kappa_i}{\kappa_{i+K}-\kappa_i}, \text{ if } \kappa_i \neq \kappa_{i+K}, \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, функция $S(x;\kappa,K)$ является сплайном степени K с вектором узлов κ тогда и только тогда, когда существуют такие $\tau_0, \ldots, \tau_{n_K - K - 2} \in \mathbb{R}$, что

$$S(x; \kappa, K) = \tau_0 B_{0,K}(x) + ... + \tau_{n_\kappa - K - 2} B_{n_\kappa - K - 2, K}(x), \text{ для любого } x \in \mathbb{R}.$$

Далее, моменты SPL-распределения имеют следующий вид (Trifonov & Potanin, 2022):

$$E(X^k) = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n_\kappa - 1} \sum\limits_{i=0}^{K} \sum\limits_{j=0}^{K} \tau_{i,t} \tau_{j,t} M_{TR}(i+j+k; \kappa_t, \kappa_{t+1})}{\sum\limits_{t=1}^{n_\kappa - 1} \sum\limits_{i=0}^{K} \sum\limits_{j=0}^{K} \tau_{i,t} \tau_{j,t} M_{TR}(i+j; \kappa_t, \kappa_{t+1})}, k \in \mathbb{N}.$$

Аналогично распределению PGN, для повышения точности аппроксимации в SPL-распределении необходимо увеличивать количество узлов, в то время как степень сплайна может оставаться неизменной. Следует отметить, что количество параметров распределения уменьшается вместе со степенью сплайна. Поэтому, если степень высока, для достижения необходимой точности аппроксимации количество узлов должно быть также велико. Отметим, что на практике обычно используются сплайны 2-й или 3-й степени (Trifonov & Potanin, 2022).

5.3 PGN-GARCH и SPL-GARCH модели

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ определена σ-алгебра периода $t-1$ как $\mathcal{F}_{t-1}$, содержащая всю доступную информацию до периода $t-1$ включительно, где $t \in \mathbb{N}$. Также обозначим через y вектор логарифмических доходностей размерности $T \times 1$, а в качестве σ выступает вектор условных волатильностей, где $T \in \mathbb{N}$. Тогда без потери общности наиболее распространенная GARCH(1,1) модель может быть представлена в следующем виде (Trifonov & Potanin, 2022):

$$y_t = \mu + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim \Theta^*,$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2,$$

$$\xi_t \sim \Theta, \text{ i.i.d.}, \ \mathbb{E}[\xi_t] = 0, \ Var(\xi_t) = 1,$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \xi_t,$$

где параметры ω, α и β определяют динамику условной дисперсии σ_t^2 и представляют наибольший интерес. Стандартизированные шоки ξ_t распределены согласно некоторому закону Θ, который на практике обычно является неизвестным.

Отметим, что некорректная спецификация Θ может приводить к снижению точности оценок условных волатильностей. С целью решения этой проблемы, в данном диссертационном иследовании предлагается аппроксимировать Θ с помощью гибких семейств стандартизированных PGN и SPL распределений (Trifonov & Potanin, 2022).

Рассмотрим последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин ξ_t^*, имеющих PGN распределение степени K с вектором параметров τ. Для обеспечения нулевого математического ожидания и единичной дисперсии необходимо произвести стандартизацию (Trifonov & Potanin, 2022):

$$\xi_t = \frac{\xi_t^* - \mathbb{E}[\xi_t^*]}{\sqrt{Var(\xi_t^*)}}.$$

Тогда случайные шоки в GARCH(1,1) модели имеют форму $\varepsilon_t = \sigma_t \xi_t$, а их функция плотности принимает вид (Trifonov & Potanin, 2022):

$$f_{\sigma_t \xi_t}(\varepsilon_t) = f_{\sigma_t \frac{\xi_t^* - \mathbb{E}[\xi_t^*]}{\sqrt{Var(\xi_t^*)}}}(\varepsilon_t).$$

В свою очередь, функция распределения выглядит следующим образом (Trifonov & Potanin, 2022):

$$\begin{aligned} F_{\sigma_t \xi_t}(x) &= P\left(\sigma_t \frac{\xi_t^* - \mathbb{E}[\xi_t^*]}{\sqrt{Var(\xi_t^*)}} \leq x\right) \\ &= P\left(\xi_t^* \leq \frac{\sqrt{Var(\xi_t^*)}}{\sigma_t} x + \mathbb{E}[\xi_t^*]\right) \\ &= F_{\xi_t^*}\left(\frac{\sqrt{Var(\xi_t^*)}}{\sigma_t} x + \mathbb{E}[\xi_t^*]\right). \end{aligned}$$

Дифференцируя функцию распределения по всей области определения, имеем (Trifonov &

Potanin, 2022):

$$
\begin{aligned}
f_{\sigma_t \xi_t}(x) = f_{\sigma_t \frac{\xi_t^* - \mathbb{E}[\xi_t^*]}{\sqrt{Var(\xi_t^*)}}}(x) &= \partial \left(F_{\xi^*} \left(\frac{\sqrt{Var(\xi_t^*)}}{\sigma_t} x + \mathbb{E}[\xi_t^*] \right) \right) / \partial x \\
&= \frac{\sqrt{Var(\xi_t^*)}}{\sigma_t} f_{\xi^*} \left(\frac{\sqrt{Var(\xi_t^*)}}{\sigma_t} x + \mathbb{E}[\xi_t^*] \right).
\end{aligned}
$$

В отличие от классической GARCH модели, плотность $f_{\sigma_t \xi_t}(\varepsilon_t; \tau)$ зависит от вектора параметров τ, обеспечивающих гибкость распределения шоков. При равенстве нулю всех параметров вектора (за исключением фиксированного на единице $\tau_0 = 1$) случайные шоки имеют нормальное распределение и PGN-GARCH полностью совпадает с классической параметрической GARCH моделью (Trifonov & Potanin, 2022).

Для оценки параметров модели применяется метод максимального правдоподобия. В случае модели PGN-GARCH, логарифмическая функция квази-правдоподобия может быть записана следующим образом (Trifonov & Potanin, 2022):

$$
\begin{aligned}
\ln L\left(\tau, \mu, \omega, \alpha, \beta; y_t\right) &= \sum_{t=1}^{n} \ln\left(f_{\sigma_t \xi_t}(\varepsilon_t)\right) \\
&= \frac{n}{2} \ln\left(Var\left(\xi_1^*\right)\right) + \sum_{t=1}^{n} \ln\left(f_{\xi_t^*} \left(\frac{\sqrt{Var(\xi_t^*)}}{\sigma_t} \varepsilon_t + \mathbb{E}[\xi_t^*] \right) \right) - \ln\left(\sigma_t\right),
\end{aligned}
$$

где $\varepsilon_t = y_t - y_{t-1}$.

Максимизация логарифма приведенной функции квази-правдоподобия позволяет получить полунепараметрические оценки параметров μ, ω, α, β и τ. Далее за счет подстановки $\hat{\tau}$ в выражение для $f_\xi(.)$ может быть получена оценка функции плотности стандартизированных шоков. По этой причине не затруднительной является задача визуализации аппроксимированной плотности, а также расчет и интересующих параметров приближенного распределения: моды, медианы, моментов и тд. Заметим, что аналогично классической GARCH модели, оценка условной волатильности зависит лишь от $\hat{\omega}$, $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ (Trifonov & Potanin, 2022).

Кратко отметим, что спецификация модели SPL-GARCH является схожей. Единственное отличие заключается в предпосылке о том, что ξ_t^* распределена согласно SPL закону с вектором параметров (τ, κ). Далее, внутренние узлы $\kappa_2, \ldots, \kappa_{n_\kappa - 1}$, коэффициенты $\tau_0, \ldots, \tau_{n_\kappa - K - 2}$, а также параметры GARCH процесса $\mu,\ \omega,\ \alpha,\ \beta$ оцениваются за счет максимизации логарифмической функции квази-правдоподобия. Отметим, что при выполнении процедуры максимизации граничные узлы $\kappa_1, \kappa_{n_\kappa}$ фиксируются на минимальном и максимальном значениях стандартизированных шоков (Trifonov & Potanin, 2022).

С целью исследования свойств оценок предложенных методов был проведен анализ симулированных данных. По результатам анализа были получены статистические свидетельства, что информационный критерий AIC является наиболее информативным критерием для подбора оптимальной степени полинома и количества узлов в сплайне в предлагаемых методах и может быть рекомендован для практического применения предложенных моделей (Trifonov & Potanin, 2022). Помимо этого, в большинстве рассмотренных случаев предложенные полунепараметрические SPL-GARCH и PGN-GARCH спецификации позволили получить более точные оценки параметров и прогнозы условной волатильности по сравнению с остальными рассмотренными методами в случае отличия распределения шоков от нормального (Trifonov & Potanin, 2022). Наконец было выявлено, что использование сплайнов является более предпочтительным в сравнении с полиномами, так как позволяет получить более высокую точность оценивания и прогнозов. Таким образом, при выборе между PGN-GARCH и SPL-GARCH спецификациями следует предпочитать последнюю.

Было также рассмотрено приложение предложенных методов к реальным данным, представленным временным рядом доходностей криптовалюты Биткоин за период с 2017 по 2019 года. Выбор данного актива для анализа был мотивирован наличием в литературе статистических свидетельств в пользу отклонения распределения случайных шоков в доходности от нормального (Katsiampa, 2017)(Troster et al., 2019). Из-за международного характера криптовалютного рынка и его тесной связи с высокоинновационным сектором информационных технологий (IT), этот рынок подвержен различным факторам влияния. Обычно определение всех ключевых закономерностей этих разнообразных влияний является достаточно затруднительным. Поэтому довольно сложно предоставить убедительные и надежные аргументы в пользу какой-либо конкретной формы распределения шоков при анализе данной криптовалюты. Это, в свою очередь, мотивирует применение предложенных методов, ослабляющих предпосылки о форме распределения случайных шоков. Обозначим основные результаты анализа условной волатильности криптовалюты Биткоин.

Исходя из информационных критериев и точности прогнозов условной волатильности, были найдены свидетельства, что классическая GARCH модель существенно уступает всем остальным рассмотренным методам (SGED-GARCH, SST-GARCH, PGN-GARCH и SPL-GARCH), что оправдывает необходимость использования более гибких методов для ослабления предпосылок о распределении (Trifonov & Potanin, 2022). SPL-GARCH продемонстрировала схожие результаты с SGED-GARCH и SST-GARCH. Данный результат согласуется с анализом симулированных данных и, вероятно, вызван наличием «тяжелых» хвостов и асимметрии в распределении (что подтвердилось результатами визуального анализа оценки функции плотности случайных шоков SPL-GARCH модели), когда предложенные методы имеют относительное преимущество при наличии мультимодальной структуры шоков, которой в данном случае не наблюдалось (Trifonov & Potanin, 2022).

Наконец, PGN-GARCH модель использовалась для оценивания влияния ожиданий инвесторов на цену нефти (Потанин & Трифонов, 2021). Однако, в данной задаче не было получено статистических свидетельств в пользу преимущества данного подхода над классической GARCH моделью что, в частности, могло быть обусловлено малым числом наблюдений.

5.4 GARCH-M-GJR-LEV модель

Классическая GARCH-M модель позволяет учитывать премию за риск в доходности активов. Однако модель не позволяет улавливать асимметричную реакцию премии за риск на шоки в доходности. Иными словами, спецификация GARCH-M процесса является симметричной и не способна дифференцировать премию за риск в зависимости от знака шоков, вызывающих волатильность. Соответственно, модель одинаково воспринимает отрицательные и положительные шоки при формировании премии за риск (Bollerslev, 2022) (Trifonov & Potanin, 2024). Таким образом, классическая модель требует выполнения предпосылки о том, что инвесторы склонны требовать одинаковую премию за риск в периоды как «хорошей», так и «плохой» волатильности. То есть, модель способна учитывать лишь абсолютное значение шоков в доходности, определяющих условную волатильность и, как следствие, премию за риск.

Тем не менее, согласно (Bollerslev, 2022), были найдены статистические свидетельства, в пользу того, что классическая GARCH-M модель может демонстрировать отсутствие значимости компоненты премии за риск в доходности активов. Более того, в некоторых предыдущих исследованиях было показано, что модель и вовсе может демонстрировать отрицательные оценки премии за риск. Отметим, что подобные результаты не соответствуют основным портфельным теориям Markowitz (1952) и Sharpe (1964), так как они свидетельствуют в пользу обратной зависимости между риском и доходностью, предполагая отрицательную корреляцию между волатильностью и доходностью активов. Согласно (Bollerslev, 2022), данная проблема может быть вызвана необходимостью дифференциации между «хорошими» и «плохими» периодами волатильности при моделировании премии за риск. Причина заключается в том, что рациональные инвесторы склонны требовать более высокую премию за риск в периоды «плохой» волатильности (downside risk), чем в случае «хороших» периодов волатильности (upside potential) (Bollerslev, 2022)(Trifonov & Potanin, 2024).

Данное диссертационное исследование предлагает новое асимметричное семейство GARCH моделей, позволяющее учитывать эффект рычага в уравнении доходности при моделировании премии за риск. Отметим, что предлагаемая спецификация модели основывается на GJR функциональной форме и позволяет улавливать двойной эффект рычага: как в уравнении условной дисперсии, так и при формировании премии за риск в уравнении доходности.

Следуя ранее введенным обозначениям, процесс генерации данных в предложенной GARCH-M-GJR-LEV модели может быть представлен с помощью следующей системы уравнений (Trifonov & Potanin, 2024):

$$y_t = \mu + \lambda_1 \sigma_{t-1}^2 + \lambda_2 \mathbb{1}_{t-1} \sigma_{t-1}^2 + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\varepsilon,t}^2),$$

$$Var(y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \mathbb{1}_{t-1} \varepsilon_{t-t}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2,$$

$$\mathbb{1}_t = \begin{cases} 0, \text{ если } \varepsilon_t \geq 0 \\ 1, \text{ если } \varepsilon_t < 0 \end{cases},$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \xi_t,$$

$$\xi_t \sim \mathcal{N}(0, 1) \;\; i.i.d.,$$

где параметры λ_1 и λ_2 определяют влияние условной дисперсии на доходность. Наличие компоненты $\lambda_2 \mathbb{1}_{t-1} \sigma_{t-1}^2$ позволяет различать «хорошие» и «плохие» периоды волатильности при определении премии за риск. Соответственно, волатильность, вызванная отрицательными шоками в доходности актива, может приводить к более высокой премии за риск чем в случае положительных шоков. Как следствие, ожидается более высокое абсолютное значение суммы оценок параметров $\lambda_1 + \lambda_2$ в сравнении с λ_1. Таким образом, в случае когда $\lambda_2 > 0$, это отражает идею о том, что инвесторы склонны требовать более высокую премию за риск в периоды, когда волатильность вызвана «медвежьим» рынком.

Предложенная модель основывается на смеси симметричного GARCH-M (Engle et al., 1987) процесса с GJR-GARCH (Glosten et al., 1993) спецификацией рычага. Однако в диссертационном исследовании используется модифицированная версия модели GARCH-M, имеющая два следующих отличия. Во-первых, премии за риск определяются через условные дисперсии как $\lambda_i \sigma_{t-1}^2, ; i = 1, 2$, в отличие от классического процесса GARCH-M, где они определяются с использованием условной волатильности, т.е. $\lambda \sigma_t$. Данная модификация является необходимой, поскольку безусловная дисперсия предлагаемого метода может быть явно выведена лишь при использовании условной дисперсии, а не условной волатильности при формировании премии за риск. Во-вторых, в то время как классическая GARCH-M модель использует текущую волатильность для определения премии за риск, в исследовании используется дисперсия предыдущего периода, то есть σ_{t-1}^2. Это необходимо по той причине, что процедура оценивания модели требует использования условной дисперсии последнего периода. Очевидно, что ε_t определяет бинарную переменную $\mathbb{1}_t$ в одном и том же периоде t. Иными словами, при спецификации модели с использованием σ_t^2 и $\mathbb{1}_t\sigma_t^2$ (вместо σ_{t-1}^2 и $\mathbb{1}_{t-1}\sigma_{t-1}^2$), становится невозможным определить ε_t в том же самом периоде t и, следовательно, оценить модель с помощью метода максимального правдоподобия (Trifonov & Potanin, 2024).

Кроме того, заметим, что в случае равенства параметров λ_2 и γ нулю, процесс генерации данных сворачивается к процессу, очень схожему с классическим GARCH-M (Trifonov & Potanin, 2024):

$$y_t = \mu + \lambda_1\sigma_{t-1}^2 + \varepsilon_t,$$

$$\varepsilon_t|\mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\varepsilon,t}^2),$$

$$Var(y_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2,$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t\xi_t,$$

$$\xi_t \sim \mathcal{N}(0, 1) \ \ i.i.d.$$

В работе (Trifonov & Potanin, 2024) было показано, что если соответствующий процесс является стационарным, то выражение для безусловной дисперсии имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} Var\left(y_t\right) = \sigma^2 = \left(\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2\right) \times \left(\mathbb{E}\left[\sigma_t^4\right] - \mathbb{E}\left[\sigma_t^2\right]^2\right) + \\ + \frac{1}{2}\lambda_2^2 \times \left(\mathbb{E}\left[\sigma_t^4\right] - \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sigma_t^2\right]^2\right) + \mathbb{E}\left[\sigma_t^2\right], \end{aligned}$$

где $\mathbb{E}\left[\sigma_t^4\right]$ является математическим ожиданием σ_t^4 и имеет следующее аналитическое выражение:

$$\mathbb{E}\left[\sigma_t^4\right] = \frac{\omega^2 + \omega\mathbb{E}\left[\sigma_t^2\right] \times (2\alpha + 2\beta + \gamma)}{1 - 3\alpha^2 - \beta^2 - \frac{3}{2}\gamma^2 - 2\alpha\beta - 3\alpha\gamma - \beta\gamma}.$$

Кроме того, $\mathbb{E}\left[\sigma_t^2\right]$ обозначает безусловную дисперсию ε_t и имеет вид, аналогичный GJR-

GARCH (Glosten et al., 1993) спецификации:

$$\sigma_\varepsilon^2 = Var(\varepsilon_t) = \frac{\omega}{1-\alpha-\gamma/2-\beta}.$$

Оценивание параметров предложенного процесса осуществлялось с помощью метода максимального правдоподобия. Таким образом, логарифмическая функция правдоподобия в предложенной GARCH-M-GJR-LEV модели может быть выписана следующим образом, предполагая нормальное распределение случайных шоков (Trifonov & Potanin, 2024):

$$\ln L(\theta, y_t) = -\frac{T}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln\sigma_t^2 - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2},$$

где $\theta = (\mu, \omega, \alpha, \beta, \lambda_1, \gamma, \lambda_2)'$ является вектором оцениваемых параметров, а $\varepsilon_t = y_t - y_{t-1}$. Значения условных волатильностей σ_t и случайных шоков ε_t могут быть рассчитаны рекурсивно согласно спецификации GARCH-M-GJR-LEV:

$$\varepsilon_t|\mathcal{F}_{t-1} = y_t - \mu - \lambda_1\sigma_{t-1}^2 - \lambda_2 I_{t-1}\sigma_{t-1}^2,$$
$$\sigma_t^2|\mathcal{F}_{t-1} = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma I_{t-1}\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2.$$

Максимизация приведенной функции правдоподобия позволяет получить оценки неизвестных параметров $\mu,\ \omega,\ \alpha,\ \beta,\ \lambda_1,\ \gamma,\ \lambda_2$.

На основе анализа с использованием численных экспериментов Монте-Карло было проведено сравнение точности оценок предложенных методов с существующими симметричными аналогами. В результате, были найдены статистические свидетельства в пользу значительно более высокой точности оценивания параметров, а также точности прогнозов условных волатильностей и доходностей при применении GARCH-M-GJR-LEV модели в том случае, когда процесс генерации данных характеризуется наличием асимметричной премии за риск (Trifonov & Potanin, 2024).

Предложенная модель была апробирована на данных фондовых индексов России и Соединенных Штатов Америки. По результатам проведенного анализа были получены статистические свидетельства в пользу того, что механизм формирования премии за риск различается в периоды спада и роста на рынке. Так, согласно результатам, полученным при анализе российского рынка и рынка Соединенных Штатов Америки, волатильность, обычно, оказывает влияние на премию за риск лишь в периоды спада (отрицательные шоки) (Trifonov & Potanin, 2024). При этом на рынке США соответствующее влияние является положительным, а на российском – отрицательным (Трифонов, 2023).

6 Публикация результатов исследования

По результатам диссертационного исследования, были подготовлены и опубликованы в ведущих российских и зарубежных журналах[3] следующие научные статьи:

1. Trifonov, J. & Potanin, B. (2024). GARCH-M model with an asymmetric risk premium: Distinguishing between 'good' and 'bad' volatility periods. *International Review of Financial Analysis, 91.*

   Характеристики статьи: Scopus Q1, Список А; Объем: 1.6 авторских листа.

2. Trifonov, J., & Potanin, B. (2022). Semi-Nonparametric Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Model with Application to Bitcoin Volatility Estimation. *HSE Economic Journal, 26(4), p.623-646.*

   Характеристики статьи: Scopus Q3, Список С; Объем: 1.2 авторских листа.

3. Трифонов Ю. С. (2023). Моделирование премии за риск на российском фондовом рынке с учетом эффекта асимметрии. *Прикладная эконометрика, 71, с. 5–19.*

   Характеристики статьи: Scopus Q3, Список В; Объем: 1 авторский лист.

4. Потанин, Б. С., & Трифонов, Ю. С. (2021). Влияние ожиданий инвесторов на цену нефти. *Прикладная эконометрика, 63, с. 76–90.*

   Характеристики статьи: Scopus Q2, Список В; Объем: 0.8 авторских листа.

[3]Все журналы индексируются в международной базе цитирований Scopus.

5. Трифонов, Ю. С., Потанин, Б. С. (2023). Многомерная асимметричная GARCH-модель с динамической корреляционной матрицей. *Финансы: теория и практика, 26(2), с. 204–218.*

   Характеристики статьи: Scopus Q3, Объем: 1.1 авторских листа.

Помимо публикаций результаты диссертационного исследования были также представлены соискателем на следующих международных конференциях:

1. **2nd International Conference on Econometrics and Business Analytics (iCEBA)**. *American University of Armenia & Central Bank of Armenia, Erevan & Dilijan, Republic of Armenia, 2022.*

   Доклад: GARCH-M model with an asymmetric risk premium: Distinguishing between 'good' and 'bad' volatility periods.

2. **VIII International Conference Modern Econometric Tools and Applications – META2022**. *HSE University, Nizhny Novgorod, Russia, 2022*

   Доклад: GARCH-M model with an asymmetric risk premium: Distinguishing between 'good' and 'bad' volatility periods.

3. **VII International Conference Modern Econometric Tools and Applications – META2021**. *HSE University, Nizhny Novgorod, Russia, 2021*

   Доклад: Semi-nonparametric multivariate GARCH model with dynamic correlation matrix.

4. **XXII April International Academic Conference on Economic and Social Development: 3rd Workshop "Applied Econometrics"**. *HSE University, Moscow, Russia, 2021*

   Доклад: Influence of investors' expectations on oil prices.

Список литературы

Black, F. (1976). Studies of stock price volatility changes. *In: Proceedings of the 1976 Meeting of the Business and Economic Statistics Section, American Statistical Association*, (pp. 177–181).

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, *31*, 307–327.

Bollerslev, T. (2022). Realized semi(co)variation: Signs that all volatilities are not created equal. *Journal of Financial Econometrics*, *20*, 219–252.

Bollerslev, T., Litvinova, J., & Tauchen, G. (2006). Leverage and volatility feedback effects in high-frequency data. *Journal of Financial Econometrics*, *4*, 353–384.

Bollerslev, T., & Wooldridge, J. M. (1992). Quasi-maximum likelihood estimation and inference in dynamic models with time-varying covariances. *Econometric Reviews*, *11*, 143–172.

Christie, A. (1982). The stochastic behavior of common stock variances value, leverage and interest rate effects. *Journal of Financial Economics*, *10*, 407–432.

de Boor, C. (1978). A practical guide to splines. *Mathematics of Computation*, *34*.

Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, *50*, 987–1007.

Engle, R. F., Lilien, D. M., & Robins, R. P. (1987). Estimating time varying risk premia in the term structure: The arch-m model. *Econometrica*, *55*, 391–407.

Feng, L., & Shi, Y. (2017). A simulation study on the distributions of disturbances in the garch model. *Cogent Economics & Finance*, *5*.

Gallant, A. R., & Nychka, D. W. (1987). Semi-nonparametric maximum likelihood estimation. *Econometrica*, *55*, 363–390.

Gemmill, G., & Saflekos, A. (2000). How useful are implied distributions? *The Journal of Derivatives*, *7*, 83–91.

Glosten, L. R., Jagannathan, R., & Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *The Journal of Finance*, *48*, 1779–1801.

Hansen, P. R., Huang, Z., & Shek, H. H. (2012). Realized garch: a joint model for returns and realized measures of volatility. *Journal of Applied Econometrics*, *27*, 877–906.

Hong, S. Y., & Linton, O. (2020). Nonparametric estimation of infinite order regression and its application to the risk-return tradeoff. *Journal of Econometrics*, *219*, 389–424.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1979). Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*, *47*, 263–292.

Katsiampa, P. (2017). Volatility estimation for bitcoin: A comparison of garch models. *Economics Letters*, *158*, 3–6.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, *7*, 77–91.

McAleer, M., Hoti, S., & Chan, F. (2009). Structure and asymptotic theory for multivariate asymmetric conditional volatility. *Econometric Reviews*, *28*, 422–440.

Miralles-Marcelo, J. L., Miralles-Quirós, J. L., & del Mar Miralles-Quirós, M. (2013). Multivariate garch models and risk minimizing portfolios: The importance of medium and small firms. *The Spanish Review of Financial Economics*, *11*, 29–38.

Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica*, *59*, 347–370.

Rossi, A. G., & Timmermann, A. (2015). Modeling covariance risk in merton's icapm. *The Review of Financial Studies*, *28*, 1428–1461.

Sharpe, W. F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, *19*, 425–442.

Trifonov, J., & Potanin, B. (2022). Semi-nonparametric generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with application to bitcoin volatility estimation. *HSE Economic Journal*, *26*, 623–646.

Trifonov, J., & Potanin, B. (2024). Garch-m model with an asymmetric risk premium: Distinguishing between 'good' and 'bad' volatility periods. *International Review of Financial Analysis*, *91*.

Troster, V., Tiwari, A. K., Shahbaz, M., & Macedo, D. N. (2019). Bitcoin returns and risk: A general garch and gas analysis. *Finance Research Letters*, *30*.

Wang, J., Jiang, Y., Zhu, Y., & Yu, J. (2020). Prediction of volatility based on realized-garch-kernel-type models: Evidence from china and the u.s. *Economic Modelling*, *91*, 428–444.

Zhang, X., & King, M. L. (2013). Gaussian kernel garch models. *Monash Econometrics and Business Statistics Working Papers*, *19/13*.

Zhang, X. F. (2006). Information uncertainty and stock returns. *The Journal of Finance*, *61*, 105–137.

Потанин, Б. С., & Трифонов, Ю. С. (2021). Влияние ожиданий инвесторов на цену нефти. *Прикладная эконометрика*, *63*, 76–90.

Трифонов, Ю. С. (2023). Моделирование премии за риск на российском фондовом рынке с учетом эффекта асимметрии. *Прикладная эконометрика*, *71*, 5–19.