

Вступительный тест по математике

Время выполнения: 120 минут

Задача 1 [20 баллов]

Определите максимальное значение функции U , значение которой зависит от аргументов x и y , при наличии ограничений на x и y . Каждый из пунктов рассматривайте независимо от других

- а) (5 баллов) $U = xy; x + y = 10$
- б) (5 баллов) $U = -xy; x + y = 10; x \geq 0; y \geq 0$
- в) (10 баллов) $U = -(x - 5)^2 - (y - 5)^2; x + y = 10; x \geq 0; y \geq 0$

А.Н. Челеховский

Задача 2 [20 баллов]

- а) (5 баллов) Рассмотрим следующую последовательность: 1, 5, 9, ..., то есть каждый следующий элемент последовательности на 4 больше предыдущего. Определите сумму первых 100 элементов данной последовательности.
- б) (5 баллов) Рассмотрим следующую последовательность: 1, 2, 4, 8, ..., то есть каждый следующий элемент последовательности в 2 раз больше предыдущего. Определите сумму первых 50 элементов данной последовательности (в ответ запишите число, не высчитывая его).
- в) (10 баллов) Рассмотрим следующую конечную последовательность: 1, 7, 13, ..., x , то есть каждый следующий элемент последовательности на 6 больше предыдущего. Сумма всех элементов данной последовательности равна 833. Определите, чему равен x .

Дмитрий Михайлов

Задача 3 [20 баллов]

Имеется следующая система неравенств:

$$\begin{cases} 11 - y \geq \beta \\ 22 - 2y \geq 10 - x \\ 4,5 - x \geq \beta - 1,5 \\ 4,5 - x \geq 5,5 - y \end{cases}$$

Известно, что $x \geq 0, y \geq 0, \beta \in [1,5; 6]$. Определите все значения x и y в зависимости от параметра β в области его доступных значений, при которых сумма x и y будет максимальной. Иными словами, для всех доступных значений параметра β предложите такие x и y которые максимизировали бы следующую функцию: $F = x + y$.

Дмитрий Михайлов

Задача 4 [20 баллов]

Известно, что функция, отражающая зависимость налоговых сборов с некоторой фирмы от ставки налога на добавленную стоимость, является квадратичной параболой с ветвями, направленными вниз. Государство может собрать с данной фирмы максимально возможные налоговые сборы при налоговой ставке t , равной 100. Пусть при $t = 80$ государство собирает 1200 рублей в качестве налогов.

- а) (10 баллов) Какую сумму налоговых сборов соберёт государство при $t = 120$?
- б) (10 баллов) Какую сумму налоговых сборов соберёт государство при $t = 160$?

Иван Ступак

Задача 5 [20 баллов]

Андрей и Борис выезжают из города N в одном направлении. Андрей едет все время с постоянной скоростью, равной $v_A = 4a$ в минуту, где a — некоторый положительный параметр. Борис выехал на $2a$ минут позже Андрей, причем его средняя скорость за x минут от начала его движения описывается функцией $v_B = x + 2a$.

Найдите среднюю скорость Бориса за период времени, когда расстояние между ним и Андреем уменьшалось.

Дмитрий Монахов