Вступительный тест по математике

Время выполнения: XX минут

Задача 1 [20 баллов]

Определите максимальное значение функции U, значение которой зависит от аргументов x и y, при наличиии ограничений на x и y. Каждый из пунктов рассматривайте независимо от других

а) **(5 баллов)** $U = xy$; $x + y = 10$

б) **(5 баллов)** $U = -xy$; $x + y = 10$;$x \geqslant 0; y \geqslant 0$

в) **(10 баллов)** $U = -(x-5)^2 - (y-5)^2$; $x + y = 10$; $x \geqslant 0; y \geqslant 0$

А.Н. Челеховский

№1

а) $y = 10 - x$

$U = x \cdot y = x \cdot (10 - x) = 10x - x^2$ − 2б.

$U(x)$ − парабола с ветвями, направленными вниз − 1б.

$x_{верш.} = -\frac{10}{2\cdot(-1)} = 5$ − 1б.

$U_{max} = 10 \cdot 5 - 5^2 = 25$ − 1б.

б) $y = 10 - x$

$U = -x \cdot (10 - x) = x^2 - 10x$ − 2б.

$U(x)$ − парабола с ветвями, направленными вверх − 1б.

~~x~~ $\Rightarrow$ max U достигается на одном из граничных значений x ($x=0$ или $x=10$) − 1б.

$U(x=0) = 0$; $U(x=10) = 0 \Rightarrow U_{max} = 0$ − 1б.

в) $y = 10 - x$

$U = -(x-5)^2 - (5-x)^2 = -x^2 + 10x - 25 -$

$- 25 + 10x - x^2 = -2x^2 + 20x - 50$ − 4б.

$U(x)$ − парабола с ветвями, направленными вниз − 2б.

$x_{верш.} = -\frac{20}{2\cdot(-2)} = 5$ − 2б.

$U_{max} = -2 \cdot 25 + 20 \cdot 5 - 50 = 0$ − 2б.

__Или__: заметим, что max $U = 0$ +5б. при $x = 5$, $y = 5$,

что соответствует условию $x + y = 10$ +5б.

Задача 2 [20 баллов]

(a) Рассмотрим следующую последовательность: $1, 5, 9, \ldots$, то есть каждый следующий элемент последовательности на 4 больше предыдущего. Определите сумму первых 100 элементов данной последовательности. **(5 баллов)**

(b) Рассмотрим следующую последовательность: $1, 2, 4, 8, \ldots$, то есть каждый следующий элемент последовательности в 2 раз больше предыдущего. Определите сумму первых 50 элементов данной последовательности (в ответ запишите число, не высчитывая его). **(5 баллов)**

(c) Рассмотрим следующую конечную последовательность: $1, 7, 13, \ldots, x$, то есть каждый следующий элемент последовательности на 6 больше предыдущего. Сумма всех элементов данной последовательности равна 833. Определите, чему равен x. **(10 баллов)**

Дмитрий Михайлов

Решение:

Задача 2

(a) $1, 5, 9, \ldots \rightarrow$ это арифметическая последовательность

$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$, у нас $a_1 = 1$, $n = 100$, $d = 4$

тогда: $a_{100} = 1 + 99 \cdot 4 = 397$

$\boxed{S_{\text{ариф}} = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n} \rightarrow S_{\text{ариф}} = \frac{1 + 397}{2} \cdot 100 =$

$= 398 \cdot 50 = \underline{19900}$ +5

(b) $2, 4, 8, \ldots \rightarrow$ это геометрическая последовательность

$q = b_2 / b_1 \rightarrow q = 2/1 = 2$, где $b_1 = 1$

$\boxed{S_{\text{геом}} = \frac{(q^n - 1) \cdot b_1}{q - 1}} \rightarrow S_{\text{геом}} = \frac{(2^{50} - 1) \cdot 1}{2 - 1} = \underline{2^{50} - 1}$

+5

(c) $1, 7, 13, \ldots x \rightarrow$ это арифметическая последовательность

у нас $a_1 = 1$, $d = 6$, $n = ?$, $S_{\text{ариф}} = 833$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 1 + (n-1)6 = \underline{6n - 5 = x}$

$S_{\text{ариф}} = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n = \frac{(1 + x)}{2} \cdot n = \frac{(1 + 6n - 5)}{2} \cdot n =$

$= \frac{(6n - 4)}{2} \cdot n = (3n - 2)n = \underline{3n^2 - 2n = 833}$

$3n^2 - 2n - 833 = 0 \rightarrow D = 4 + 12 \cdot 833 = 10000 \rightarrow \sqrt{D} = 100$

$n_{1,2} = \frac{2 \pm 100}{6} \rightarrow \underline{n = \frac{102}{6} = 17}$

$x = 6n - 5 = 6 \cdot 17 - 5 = \underline{97}$ +10

Задача 3 [20 баллов]

Имеется следующая система неравенств:

$$\begin{cases} 11 - y \geqslant \beta \\ 22 - 2y \geqslant 10 - x \\ 4{,}5 - x \geqslant \beta - 1{,}5 \\ 4{,}5 - x \geqslant 5{,}5 - y \end{cases}$$

Известно, что $x \geqslant 0, y \geqslant 0, \beta \in [1{,}5; 6]$. Определите все значения x и y в зависимости от параметра β в области его доступных значений, чтобы сумма x и y была наибольшей. Иными словами, для всех доступных значений параметра β предложите такие x и y которые максимизировали бы следующую функцию: $F = x + y$.

Дмитрий Михайлов

Решение:

Задача #3

$x, y \geq 0$; $\beta \in [1.5; 6]$

$$\begin{cases} F = x + y \to \max\limits_{x, y \geq 0} \\ \text{s.t.} \begin{cases} 11 - y \geq \beta \\ 22 - 2y \geq 10 - x \\ 4.5 - x \geq \beta - 1.5 \\ 4.5 - x \geq 5.5 - y \end{cases} \end{cases}$$

① $11 - y \geq \beta \to \underline{y \leq 11 - \beta}$

② $22 - 2y \geq 10 - x \to 2y \leq 12 + x \to \underline{y \leq 6 + \frac{1}{2}x}$

③ $4.5 - x \geq \beta - 1.5 \to \underline{x \leq 6 - \beta}$

④ $4.5 - x \geq 5.5 - y \to \underline{y \geq 1 + x}$

①+③ $x = 6 - \beta$, т.к. $\beta \in [1.5; 6]$, $\underline{x \in [0; 4.5]}$
$y = 11 - \beta$, т.к. $\beta \in [1.5; 6]$, $y \in [5; 9.5]$

$x = 6 - \beta \to \beta = 6 - x \to$ подставляем в $y = 11 - \beta \to$
$y = 11 - (6 - x) = 5 + x$, траектория пересечения
но $x \in [0; 4.5] \to \underline{y = 5 + x, x \in [0; 4.5]}$

①+②: $y = 11 - \beta \ominus y = 6 + \frac{1}{2}x \to 5 - \beta = \frac{1}{2}x \to \underline{x = 10 - 2\beta}$

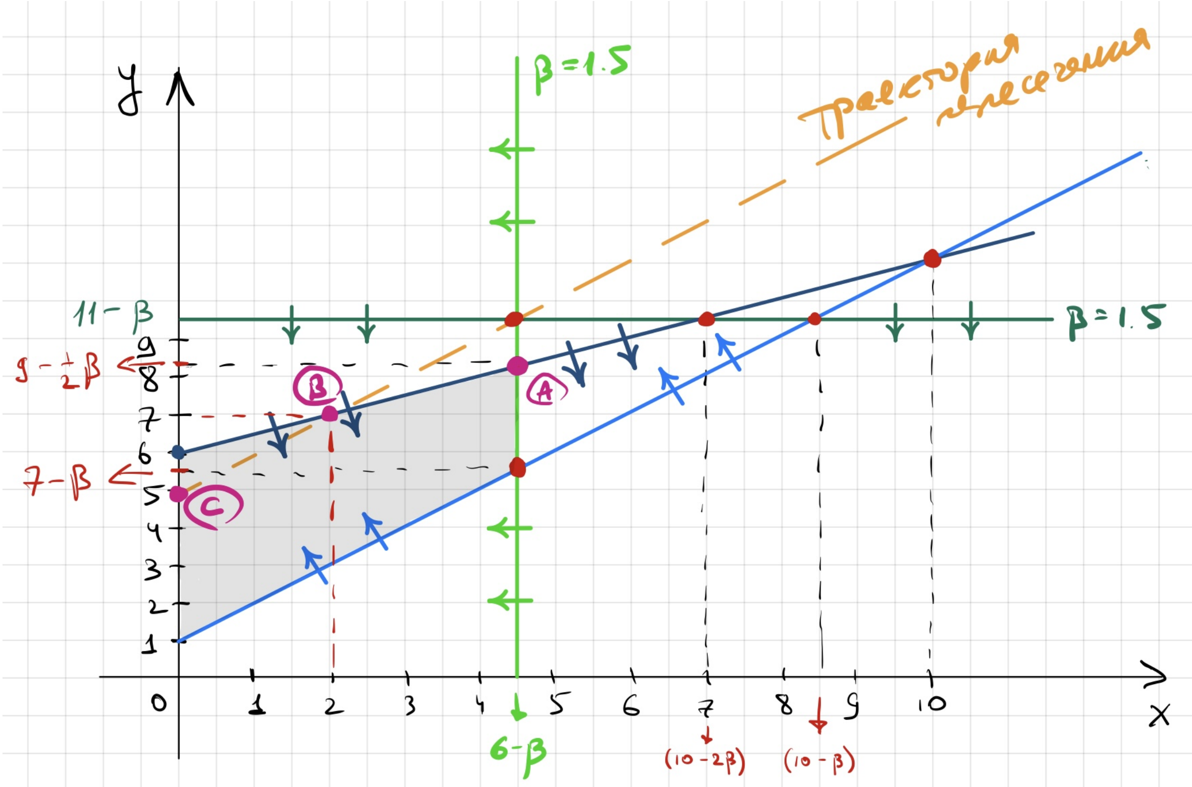
①+③: $y = 11 - \beta \cap x = 6 - \beta$, пересечение горизонтальной и вертикальной линий

①+④: $y = 11 - \beta \ominus 1 + x \to \underline{x = 10 - \beta}$

②+③: $y = 6 + \frac{1}{2}(6 - \beta) = \underline{9 - \frac{1}{2}\beta}$, $\underline{x = 6 - \beta}$

②+④: $y = 6 + \frac{1}{2}x \ominus y = 1 + x \to 5 = \frac{1}{2}x \to \underline{x = 10}$

③+④: $y = 1 + x = 1 + (6 - \beta) = \underline{7 - \beta}$, $\underline{x = 6 - \beta}$


y
x
β = 1.5
β = 1.5
Траектория пересечения
11 − β
9 − ½β
7 − β
6 − β
(10 − 2β)
(10 − β)
A
B
C
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Из графика мы видим, что синяя и голубая линии не зависят от параметр β, то есть они всегда «стоят на месте». Зелёная и салатовая линии будут двигаться в зависимости от параметра β. Но мы нашли траекторию всех их пересечений (оранжевая пунктирная линия). Тогда с учётом всего выше сказанного, мы можем сказать, что серая область удовлетворяет всем неравенствам.

Мы хотим, чтобы сумма x и y была максимальной, тогда нам надо постараться оказаться как можно «правее» и как можно «выше», при прочих равных условиях. Заметим, что ограничение $x \leq 6 - \beta$ всегда будет приоритетным для выбора доступного x. Тогда, можно сказать, что: $x = 6 - \beta$

Замети, что с точки A до точки B ограничение по y будет определяется синей линией. А после точки B до точки C ограничение по y будет определяться зелёной линией.

B: $y = 5 + x \Leftrightarrow y = 6 + \frac{1}{2}x \rightarrow \frac{1}{2}x = 1 \rightarrow x = 2,\ y = 7$

если $x = 2$, то $x = 6 - \beta = 2 \rightarrow \beta = 4$

$x^* = 6 - \beta$; $y^* = \begin{cases} 9 - \frac{1}{2}\beta, & \beta \in [1.5; 4) \\ 11 - \beta, & \beta \in [4; 6] \end{cases}$

+10 баллов за один участок

+10 баллов за второй участок

если решили для одного значения β, то +10 баллов

Задача 4 [20 баллов]

Известно, что функция, отражающая зависимость налоговых сборов с некоторой фирмы от ставки налога на добавленную стоимость, является квадратичной параболой с ветвями, направленными вниз. Государство может собрать с данной фирмы максимально возможные налоговые сборы при налоговой ставке t, равной 100. Пусть при $t = 80$ государство собирает 1200 рублей в качестве налогов.

а) **(10 баллов)** Какую сумму налоговых сборов соберёт государство при $t = 120$?

б) **(10 баллов)** Какую сумму налоговых сборов соберёт государство при $t = 160$?

Иван Ступак

№4

а) График функции $T_x(t)$ - парабола с ветвями вниз, симметричная относительно вершины $\Rightarrow T_x(120) = T_x(80) = 1200$ - 10 баллов

б) $T_x(t=0) = 0 \Rightarrow T_x = at^2 + bt$ - 2б.

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 100 \\ 6400a + 80b = 1200 \end{cases}$$ - 3б.

$b = -200a$

$6400a - 16000a = 1200$

$a = -\frac{1}{8} \Rightarrow b = 25$ - 3б.

$T_x = -\frac{1}{8}t^2 + 25t$

$T_x(160) = -\frac{1}{8} \cdot 160^2 + 25 \cdot 160 =$

$= 160 \cdot (25 - 20) = 800$ - 2б.

Задача 5 [20 баллов]

Андрей и Борис выезжают из города N в одном направлении. Андрей едет все время с постоянной скоростью, равной $v_A = 4a$ в минуту, где a — некоторый положительный параметр. Борис выехал на $2a$ минут позже Андрей, причем его средняя скорость за x минут от начала его движения описывается функцией $v_B = x + 2a$.

Найдите среднюю скорость Бориса за период времени, когда расстояние между ним и Андреем уменьшалась. Ответ может зависеть от a.

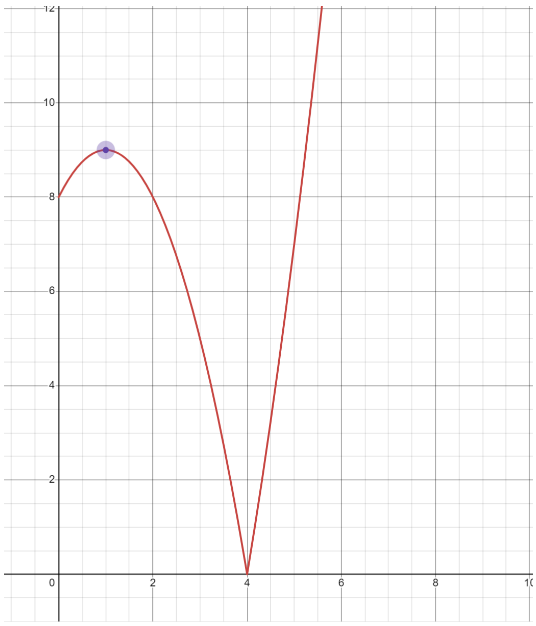
Дмитрий Монахов

Решение:

Расстояние, которое проехал Андрей на момент времени x от начала движения Бориса равно $S_A = v_A \cdot (x + 2a) = 4ax + 8a^2$.

Расстояние, которое проехал Борис на момент времени x от начала движения равно $S_B = v_B \cdot x = x^2 + 2ax$.

Тогда расстояние между Андреем и Борисом равно модулю разницы расстояний, которые они проехали: $Y = |S_B - S_A| = |x^2 - 2ax - 8a^2|$. Для удобства нарисуем график этой функции (график ниже построен для $a = 1$):



Функция убывает на участке $[a; 4a]$. Посчитаем расстояние, которое проехал Борис за это время, и разделим на время $(3a)$, чтобы найти среднюю скорость на участке:

$$v_B = \frac{S_B(4a) - S_B(a)}{3a} = \frac{24a^2 - 3a^2}{3a} = 7a.$$

Критерии оценивания:

- **4 балла** за поиск S_A (расстояния, которое проехал Андрей от начала движения Бориса или от начала движения Андрея);
- **4 балла** за поиск S_B (расстояния, которое проехал Андрей от начала движения Бориса или от начала движения Андрея);
- **2 балла** за формулировку Y (расстояния между Андреем и Борисом);
- **5 баллов** за поиск участка убывания расстояния;
- **5 баллов** за поиск средней скорости на данном участке.