Вступительный тест по экономике

Время выполнения: XX минут

Задача 1 (20 баллов)

Мистер Икс производит особо секретный товар по двум таким же секретным технологиям. Первая технология описывается производственной продукцией $Q_1 = \sqrt{x_1 x_2}$, а вторая $Q_2 = \sqrt{x_3 x_4}$, где x_i — количество i-ого фактора производства, а Q_i — количество готовой продукции по i-ой технологии. Известно, что цены этих четырех факторов производства равны соответственно $p_1 = 6$, $p_2 = 1$, $p_3 = 2$ и $p_4 = 2$. Мистер Икс уже закупил 4 единицы первого фактора производства и не может менять его количество.

а) **(5 баллов)** Найдите функцию издержек Мистера Икс при производстве секретного товара с помощью первой технологии ($TC_1(Q_1)$).

б) **(5 баллов)** Найдите функцию издержек Мистера Икс при производстве секретного товара с помощью второй технологии ($TC_2(Q_2)$).

в) **(5 баллов)** Найдите функцию издержек в зависимости от общего количества, если Мистер Икс может использовать обе технологии одновременно ($TC(Q)$).

г) **(5 баллов)** Найдите предложение секретного товара Мистером Икс в зависимости от цены товара P. Изобразите график функции предложения в координатах (Q, P).

Дмитрий Монахов

Решение:

а) $x_1 = 4 \quad \Rightarrow Q_1 = 2\sqrt{x_2} \quad \Rightarrow x_2 = \frac{Q_1^2}{4} \quad \Rightarrow \quad TC_1(Q_1) = \frac{Q_1^2}{4} + 24.$

б) Выразим один фактор производства через другой: $x_3 = \frac{Q_2^2}{x_4}$. Тогда издержки будут иметь вид:

$$TC_2 = \frac{2Q_2^2}{x_4} + 2x_4 \to \min_{x_4 > 0}.$$

По неравенству о средних $x_4^* = Q_2$, тогда $x_3^* = Q_2$. Следовательно, итоговые издержки имеют вид:

$$TC_2(Q_2) = 4Q_2.$$

в) Выразим один выпуск через другой: $Q_2 = Q - Q_1$. Тогда издержки будут иметь вид:

$$TC = 4(Q - Q_1) + \frac{Q_1^2}{4} + 24 \to \min_{0 \leqslant Q_1 \leqslant Q}.$$

Это парабола ветвями вниз, максимум в вершине: $Q_1^* = 8$. С учетом ограничений, получаем:

$$TC(Q) = \begin{cases} TC_1(Q) + TC_2(0) & \text{если } Q \leqslant 8 \\ TC_1(8) + TC_2(Q-8) & \text{если } Q > 8. \end{cases}$$

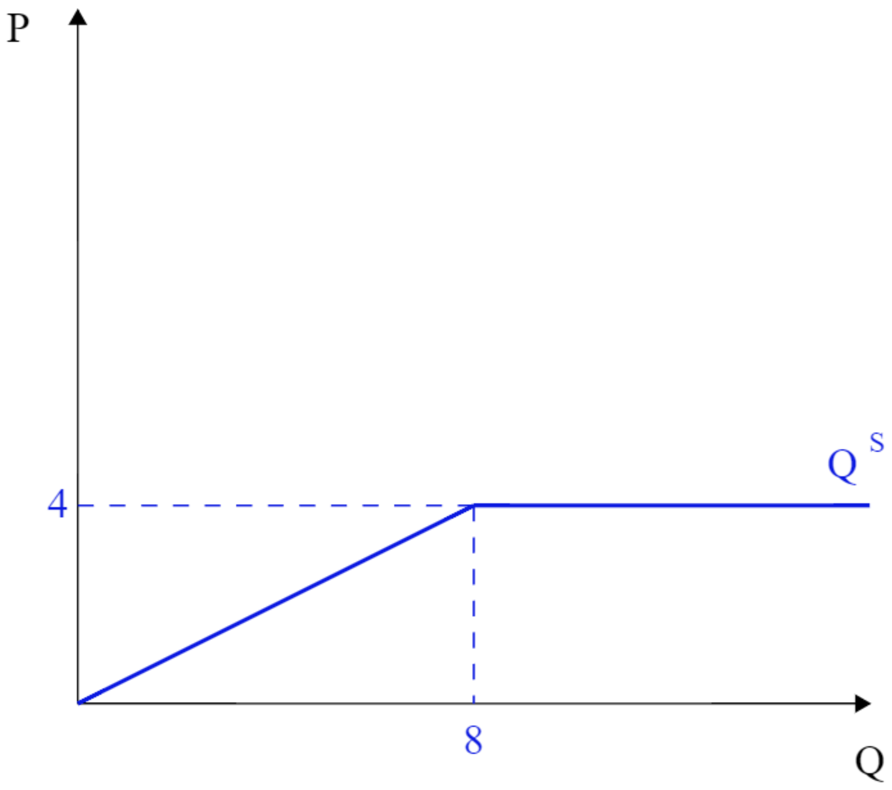
Итоговый ответ:

$$TC(Q) = \begin{cases} \frac{Q^2}{4} + 24 & \text{если } Q \leqslant 8 \\ 4Q + 8 & \text{если } Q > 8. \end{cases}$$

г) Поскольку предельные издержки производства неубывают и $AVC_{\min} = 0$, то в оптимуме $P = MC$. Тогда получим обратную функцию предложения:

$$P^s = \begin{cases} \frac{Q}{2} & \text{если } Q \leqslant 8 \\ 8 & \text{если } Q > 8. \end{cases}$$

График функции предложения в осях (Q, P):



Критерии оценивания:

а)
- **1 балл** за подстановку $x_1 = 4$;
- **1 балл** за выражение $x_2 = \frac{Q_1^2}{4}$;
- **3 балла** за функцию издержек.

б)
- **2 балла** за $x_4^* = x_3^* = Q$;
- **2 балл** за доказательства минимума издержек в соответствии с выбранным методом решения (вторая производная, метод интервалов для первой производной, неравенство о средних, обоснование приравнивания предельных величин $\frac{MP_i}{MC_i}$);
- **1 балла** за функцию издержек.

в)
- **1 балла** за точку оптимума одной из переменных (например, в решении $Q_1^* = 8$;
- **1 балл** за доказательство минимума издержек в соответствии с выбранным методом решения (вторая производная, вершина параболы, метод интервалов для первой производной, обоснование приравнивания предельных величин MC_i);
- **3** балла за функцию издержек.

г)
- **2 балла** за обратную функцию предложения $P^s(Q)$ или аналогичную ей функцию предложения $Q^s(P)$;
- **1 балл** за доказательство максимума прибыли в соответствии с выбранным методом решения (вторая производная, вершина парабола, метод интервалов для первой производной, обоснование приравнивания P и MC);
- **2 балла** за график функции предложения.

Задача 2 (25 баллов)

Рассмотрим страну N, в которой единственная отечественная фирма, производящая ёлочные игрушки, является монополистом. Обратная функция рыночного спроса на ёлочные игрушки внутри страны имеет вид $P = 100 - Q$, где Q — объём продукции, на который отечественные покупатели предъявляют спрос. Функция общих издержек монополиста имеет вид: $TC(q) = q^2$, где q — это общий объём выпуска продукции монополистом. Монополист может также продавать свою продукцию зарубеж по мировой цене, равной $P_w = 80$. Страна N является малой открытой экономикой и не может влиять на мировую цену ёлочных игрушек. Монополист назначает разные цены для отечественных покупателей и для зарубежных покупателей.

а) **(5 баллов)** Найдите оптимальные объёмы продаж на внутреннем и внешнем рынке.

б) **(5 баллов)** Пусть правительство страны N вводит потоварный налог на монополиста на продажи отечественным покупателям в размере t_h. Правительство вводит такой потоварный налог t_h, чтобы максимизировать налоговые сборы T_1. Определите t_h и T_1.

в) **(5 баллов)** Пусть правительство страны N вводит потоварный налог на монополиста на продажи зарубежным покупателям в размере t_f. Правительство вводит такой потоварный налог t_f, чтобы максимизировать налоговые сборы T_2. Определите t_f и T_2.

г) **(5 баллов)** Пусть правительство страны N вводит потоварный налог на монополиста на все продажи: как отечественным покупателям, так и зарубежным в размере t_v. Правительство вводит такой потоварный налог t_v, чтобы максимизировать налоговые сборы T_3. Определите t_v и T_3.

д) **(5 баллов)** Сравните значение T_3 и сумму T_1 и T_2, то есть $T_3 \vee T_1 + T_2$: что больше? Дайте экономическую интерпретацию полученного результата.

Дмитрий Михайлов

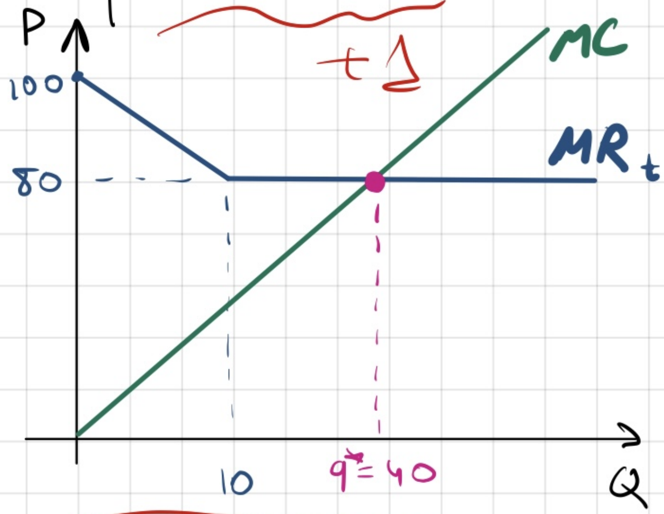
Задача #2 $P = 100 - Q,\quad P_w = 80,\quad TC = q^2$

(a) $MR_h = 100 - 2Q,\quad MR_f = 80,\quad MC = 2q$

$MR_h = MR_f \Rightarrow 100 - 2Q = 80 \Rightarrow Q = 10$ +1

$$MR_t = \begin{cases} 100 - 2Q, & Q \in [0; 10) \\ 80, & Q \in [10; +\infty) \end{cases} = MC = 2q \Rightarrow 2q = 80 \Rightarrow q^* = 40$$

+1 +1



+1 +1

$Q_h^* = 10$, $Q_f^* = 30$, тогда

$P_h^* = 90$, $P_f^* = 80$

+1

(b) $MR_h = 100 - 2Q - t_h$

$MR_h = MR_f \Rightarrow 100 - 2Q - t_h = 80 \Rightarrow Q = 10 - \frac{1}{2}t_h$

$$MR_t = \begin{cases} 100 - 2Q - t_h, & Q \in [0; 10 - \frac{1}{2}t_h) \\ 80, & Q \geq 10 - \frac{1}{2}t_h \end{cases} = MC = 2q \Rightarrow$$

+1

$\Rightarrow 2q = 80 \Rightarrow q^* = 40$, $Q_h^* = 10 - \frac{1}{2}t_h \Rightarrow$

+1

$\Rightarrow T_1 = 10t_h - \frac{1}{2}t_h^2 \to \max\limits_{t_h \geq 0}$ ЭИВВМ $\to$ max в вершине

+1

$t_h^* = 10$, $T_1 = 50$

+1

(c) $MR_h = 100 - 2Q$; $MR_f = 80 - t_f$ +1

$MR_h = 100 - 2Q = 80 - t_f \Rightarrow 2Q = 20 + t_f \Rightarrow$

$\Rightarrow Q = 10 + \frac{1}{2} t_f$

$$MR_t = \begin{cases} 100 - 2Q, & Q \in [0; 10 + \frac{1}{2} t_f) \\ 80 - t_f, & Q \geq 10 + \frac{1}{2} t_f \end{cases} = MC = 2q$$

+1

$80 - t_f = 2q \Rightarrow q^* = 40 - \frac{1}{2} t_f$, но

+1

$q^* = 40 - \frac{1}{2} t_f \geq 10 + \frac{1}{2} t_f \Rightarrow t_f \leq 30$

$q_f = q^* - q_h = 40 - \frac{1}{2} t_f - (10 + \frac{1}{2} t_f) =$

$= 30 - t_f \Rightarrow T_2 = 30 t_f - t_f^2 \to \max\limits_{0 \leq t_f \leq 30}$ +1

ЭПВВм значит max в вершине $t_f^* = 15$, $T_2 = 225$

+1

(d) $MR_h = 100 - 2Q - t_v$

$MR_f = 80 - t_v$

$\Rightarrow MR_h = MR_f$ при $q = 10$

+1

$$MR_t = \begin{cases} 100 - 2Q - t_v, & Q \in [0; 10) \\ 80 - t_v, & Q \geq 10 \end{cases} = 2q \Rightarrow$$

+1

$\Rightarrow 80 - t_v = 2q \Rightarrow q^* = 40 - \frac{1}{2} t_v$ +1

$T_3 = (40 - \frac{1}{2} t_v) t_v = -\frac{1}{2} t_v^2 + 40 t_v \to \max\limits_{0 \leq t_v \leq 80}$

+1

$t_v = 40$, $T_3 = 800$

+1

+3 интуиция

(e) $T_3 = 800 \geq T_1 + T_2 = 275$ +2

Задача 3 (20 баллов)

В некоторой стране кривая краткосрочного совокупного предложения линейна и выходит из начала координат, а совокупный спрос описывается уравнением количественной теории денег. Экономика находилась в ситуации инфляционного разрыва и центральный банк изменил денежную массу так, что уровень цен в краткосрочном периоде сократился на 10% и экономика достигла полной занятости.

а) **(5 баллов)** Проиллюстрируйте изменение равновесия графически

б) **(5 баллов)** Как и на сколько процентов изменились денежная масса и равновесный выпуск в краткосрочном периоде вследствие политики центрального банка?

в) **(5 баллов)** Перечислите три способа, с помощью которых центральный банк может добиться изменения денежной массы в том направлении, которое Вы определили в пункте б). Для каждого из способов объясните механизм его влияния на денежную массу.

г) **(5 баллов)** Определите уровень циклической безработицы до сокращения денежной массы, если коэффициент Оукена в данной экономике равен 2,5.

А.Н. Челеховский

№3

а)

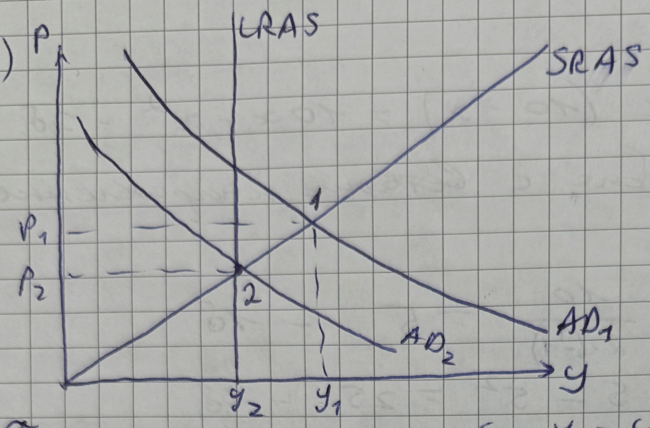


График до изменений, $Y > Y^*$ – 3б.

$M\downarrow \Rightarrow AD\downarrow$ – 2б.

б) $MV = PY$ – 1б.

Заметим, что $\frac{P_1}{P_2} = \frac{Y_1}{Y_2} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{Y_2}{Y_1}$ – 2б.

$M_2V_2 = P_2Y_2$

$M_1V_1 = P_1Y_1$ $\Rightarrow \frac{M_2}{M_1} = \frac{P_2}{P_1}\frac{Y_2}{Y_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2 = 0{,}81$ – 1б.

$\Rightarrow M\downarrow$ на 19% – 1б.

в) $\uparrow rr \Rightarrow \downarrow$ кред. возм-ти КБ $\Rightarrow M\downarrow$

$\uparrow$ ставку рефин-я $\Rightarrow$ КБ берут меньше кредитов в ЦБ $\Rightarrow M\downarrow$ ($\leftarrow$ ден. база $\downarrow$)

ЦБ продаёт гос. облигации $\Rightarrow$ ден. база $\downarrow \Rightarrow M\downarrow$

Один способ с объяснением – 2б.

Два способа с объяснением – 2б.

Три способа с объяснением – 1б.

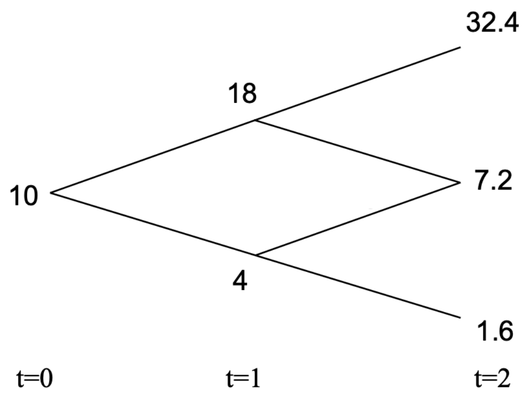
г) $\frac{Y - Y^*}{Y^*} = -2{,}5 \cdot U_{цикл.}$ – 1б.

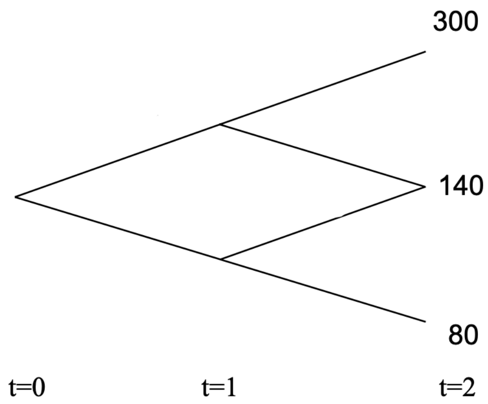
$Y^* = 99Y$ – 2б. $\frac{Y - 99Y}{99Y} = -2{,}5 \cdot U_{цикл.}$

$U_{цикл.} = -\frac{1}{9} \cdot \frac{2}{5} = -\frac{2}{45}$ – 2б.

Задача 4 (20 баллов)

Цена на нефть может изменяться согласно изображенному ниже на левом рисунке процессу: каждый год она либо подскакивает на 80% с вероятностью 1/2, либо падает на 60% с вероятностью 1/2.





У вашей фирмы есть АЗС, которая в периоде $t = 2$ приносит денежный поток в размере 300, 140 или 80 в зависимости от реализации цены на нефть - см. правый рисунок (300 - денежный поток при цене на нефть, равной 32,4; 140 - денежный поток при цене на нефть, равной 7,2; 80 - денежный поток при цене на нефть, равной 1,6). После этого АЗС ликвидируется по цене 0. Для простоты, АЗС не приносит денежного потока ни в периоде $t = 1$, ни в периоде $t = 0$.
Безрисковая ставка равна 10%.

а) **(4 балла)** Найдите справедливую стоимость АЗС в период $t = 0$

б) **(8 баллов)** Представьте, что у вас есть возможность ликвидации автозаправочной станции в периоде $t = 1$ по цене 160; решение о том, ликвидировать АЗС или нет, Вы принимаете после того, как узнали цену нефти в периоде $t = 1$. Как только заправка ликвидирована, она не может быть открыта вновь. Определите справедливую стоимость автозаправочной станции в периоде $t = 0$, принимая во внимание возможности ликвидации. Сравните с (а) и объясните разницу.

в) **(8 баллов)** Предположим, что в дополнение к варианту ликвидации из части (б) вы можете вновь открыть автозаправочную станцию в периоде $t = 2$, если она была ликвидирована в $t = 1$. Повторное открытие потребует инвестиций в размере 190 в $t = 2$ и принесет тот же денежный поток, что и на рисунке в $t = 2$. Решение о том, открывать повторно АЗС или нет, Вы принимаете после того, как узнали цену нефти в периоде $t = 2$. Определите справедливую стоимость автозаправочной станции в периоде $t = 0$, принимая во внимание вариант ликвидации и возобновления работы. Сравните с (б) и объясните разницу.

Иван Ступак

1.
$$P_g = \frac{0.25 \cdot 300 + 0.5 \cdot 140 + 0.25 \cdot 80}{1.1^2} = \frac{1500}{11}$$

2. Если цена пойдет вниз, то мы будем закрывать заправку, так как $160 > 140$ и $160 > 80$. Если цена пойдет вверх, то тогда нам необходимо сравнить:

$$160 \vee \frac{0.5(300 + 140)}{1.1} \Rightarrow 160 < 200$$

Следовательно, при росте цены закрывать заправку невыгодно
Соответственно сейчас наша заправка стоит:

$$P_g = \frac{1}{2}\cdot\frac{160}{1.1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{0.5(300+140)}{1.1^2} = \frac{1800}{11}$$

Стоимость заправки повысилась, так как у нас появились новые возможности продажи заправки, в случае когда цены идут вниз.

3. Заново открывать заправку мы можем захотеть, только если цены вначале пойдут вверх, мы решим закрыть заправку и после этого цены снова пойдут вверх. Наши действия в случае снижения цен не изменятся, мы закрываем заправку в $t = 1$.

   Рассмотрим период $t = 1$, если цены в нулевом периоде выросли, после чего мы решаем закрыть заправку. Сравним с вариантом из предыдущего пункта, когда мы не закрываем ее.

$$160 + \frac{0.5(300-190)}{1.1} \vee \frac{0.5(300+140)}{1.1} \Rightarrow 210 > 200$$

   Следовательно, нам выгодно закрывать заправку в $t = 1$, после чего отрыть ее, если цена увеличиться до 300.

$$P_g = \frac{1}{2}\cdot\frac{210}{1.1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{160}{1.1} = \frac{1850}{11}$$

   Стоимость заправки повысилась, так как у нас появились новые возможности повторного открытия заправки, в случае когда цены растут. Это позволяет нам не рисковать из-за возможного падения цен.

Задача 5 (15 баллов)

Определите максимальное значение функции U, значение которой зависит от аргументов x и y, при наличиии ограничений на x и y. Каждый из пунктов рассматривайте независимо от других

а) **(5 баллов)** $U = -xy$; $x + y \leqslant 10; x \geqslant 0; y \geqslant 0$

б) **(5 баллов)** $U = min(x; y)$; $x + y = 10; x \geqslant 0; y \geqslant 0$

в) **(5 баллов)** $U = max(x; y)$; $x + y = 10; x \geqslant 0; y \geqslant 0$

А.Н. Челеховский

№5

а) Заметим, что $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow U \leq 0$ для всех доступных $x, y \Rightarrow U_{max} = 0$ -3б.

U_{max} достижима при $x = 0$ либо $y = 0$ -1б.

$\Rightarrow U_{max} = 0$ -1б.

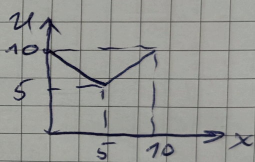
б) Если $x < y$, то не достигается $\max U$, т.к. при незначительном $\uparrow x$ и $\downarrow y$ $\min(x, y)$ вырастет; аналогично при $x > y$ -2б.

$\Rightarrow \max U$ достигается при $x = y$ – 2б.

$\Rightarrow 2x = 10$; $x = 5$; $U_{max} = 5$ – 1б.

в) $U = \max(x; 10 - x)$

$$U = \begin{cases} x; & x > 10 - x \Rightarrow x > 5 \\ 10 - x; & x \leq 10 - x \Rightarrow x \leq 5 \end{cases}$$



$\Rightarrow$ видим, что $\max U$ достигается при $x = 0$, либо $x = 10$ $\Rightarrow U_{max} = 10$

Обоснование того, что максимум достигается при $x = 0$ или $x = 10$ – 3б.

Утверждение о том, что $\max U$ достигается при $x = 0$ или $x = 10$ - 1б.

Ответ $U_{max} = 10$ – 1б.