Отбор

Экономическая школа ФЭН
Базовая группа

28 сентября 2025 г.

При решении задач описывайте процесс решения. Если Вам кажется, что в условии задачи Вы сталкиваетесь с незнакомым для Вас термином — не спешите бросать задачу, вполне возможно, что, опираясь на здравый смысл, Вы сможете решить значительную её часть. Если у Вас есть идеи хода решения задачи — не бойтесь их записывать, это может принести Вам баллы за задачу. Если не сказано — считайте все величины во всех задачах бесконечно делимыми. Успехов!

Задача 1 Оптимизация с параметром (20 баллов)

Первое уравнение выглядит как $y_1 + 2x_1 = 12$. Также, известно, что $x_1 \in [0; 6]$. Второе уравнение выглядит следующим образом: $x_2^2 + y_2 = 9$, где $x_2 \in [0; 3]$. Определим величину $Y = y_1 + y_2$, а также величину $X = x_1 + x_2$.

а) (3 балла) Определите множество возможных значений X, а также множество возможных значений Y.

б) (5 баллов) Определите множество возможных значений x_1 при всех возможных значениях X.

в) (4 балла) Выразите зависимость Y от X и x_1.

г) (8 баллов) Выведите функцию $Y = f(X)$, которая будет отображать максимально возможное значение Y при любом доступном значении X.

Махаев Д. Д.

Решение. **Дано.**

$$\begin{aligned} &y_1 + 2x_1 = 12, && x_1 \in [0{,}6]; \\ &x_2^2 + y_2 = 9, && x_2 \in [0{,}3]; \\ &Y(y_1; y_2) = y_1 + y_2, && x_1 + x_2 = X. \end{aligned}$$

Требуется: при каждом допустимом X найти максимальное Y и получить явную функцию $Y = f(X)$.

Шаг 1. Выражаем y_1, y_2 через x_1, x_2

Из линейных связей сразу

$$y_1 = 12 - 2x_1, \qquad y_2 = 9 - x_2^2.$$

Отсюда суммарный ресурс по аргументам: $x_1 \in [0{,}6]$, $x_2 \in [0{,}3]$. Поэтому

$$\boxed{X = x_1 + x_2 \in [0{,}9]} \quad \text{(иначе задача несовместима).}$$

Шаг 2. Сведение к одному переменному при фиксированном X

Подставим $x_2 = X - x_1$. Ограничение $x_2 \in [0{,}3]$ даёт для x_1:

$$0 \le X - x_1 \le 3 \iff x_1 \in \big[\max(0, X-3),\ \min(6, X)\big] =: [L(X), U(X)].$$

Целевая функция (при фиксированном X):

$$\boxed{Y(X; x_1) = y_1 + y_2 = (12 - 2x_1) + \big(9 - (X - x_1)^2\big) = 21 - 2x_1 - (X - x_1)^2}.$$

Это квадратичная функция по x_1 с отрицательным коэффициентом при x_1^2 (вогнутая парабола), значит её максимум на отрезке достигается либо в вершине параболы, либо на границе отрезка.

Шаг 3. Находим вершину (без производных)

Завершим квадрат:

$$\begin{aligned} Y(X;x_1) &= 21 - 2x_1 - \left(X^2 - 2Xx_1 + x_1^2\right) \\ &= 21 - X^2 - \left[x_1^2 - (2X-2)x_1\right] \\ &= 21 - X^2 - \left[(x_1 - (X-1))^2 - (X-1)^2\right] \\ &= \underbrace{21 - X^2 + (X-1)^2}_{\text{константа по } x_1} - (x_1 - (X-1))^2. \end{aligned}$$

Следовательно, *без учёта границ* максимум по x_1 достигается в вершине параболы

$$\boxed{x_1^{\text{unc}}(X) = X - 1},$$

а само значение уменьшается квадратично при отклонении от этой точки.

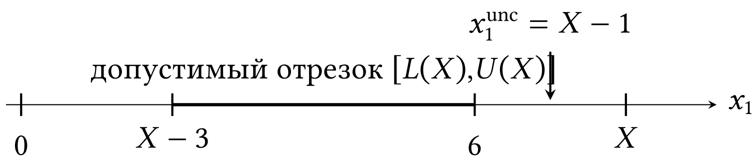

Рис. 1. Концептуальная картинка: x_1^{unc} проецируется на допустимый отрезок $[L(X),U(X)]$.

Шаг 4. Учёт границ: проекция вершины на отрезок

Оптимальный x_1 при фиксированном X — это *проекция* $x_1^{\text{unc}}(X) = X - 1$ на $[L(X),U(X)]$:

$$x_1^*(X) = \begin{cases} L(X), & \text{если } X - 1 < L(X), \\ X - 1, & \text{если } L(X) \le X - 1 \le U(X), \\ U(X), & \text{если } X - 1 > U(X). \end{cases}$$

Подставляя $L(X) = \max(0,X-3)$ и $U(X) = \min(6,X)$, получаем три естественных случая.

Случай A: $0 \le X \le 1$

Тогда $[L,U] = [0,X]$, а $X - 1 \le 0 \Rightarrow x_1^* = 0$, $x_2^* = X$.

$$y_1 = 12, \qquad y_2 = 9 - X^2 \;\Rightarrow\; \boxed{Y(X) = 21 - X^2}.$$

Случай B: $1 \le X \le 7$

Теперь $[L,U] = [X-3,X]$, причём $X - 1 \in [X-3,X] \Rightarrow x_1^* = X - 1$, $x_2^* = 1$.

$$y_1 = 12 - 2(X-1) = 14 - 2X, \quad y_2 = 9 - 1 = 8 \;\Rightarrow\; \boxed{Y(X) = 22 - 2X}.$$

Случай C: $7 \le X \le 9$

Здесь $[L,U] = [X-3,6]$, а $X - 1 \ge 6 \Rightarrow x_1^* = 6$, $x_2^* = X - 6$.

$$y_1 = 12 - 2 \cdot 6 = 0, \quad y_2 = 9 - (X-6)^2 \;\Rightarrow\; \boxed{Y(X) = 9 - (X-6)^2}.$$

Шаг 5. Сводная формула и проверка стыков

Итак, $\boxed{X \in [0{,}9]}$ и

$$\boxed{f(X) = Y_{\max}(X) = \begin{cases} 21 - X^2, & 0 \le X \le 1, \\ 22 - 2X, & 1 \le X \le 7, \\ 9 - (X-6)^2, & 7 \le X \le 9. \end{cases}}$$

Непрерывность на стыках: $f(1) = 21 - 1 = 20 = 22 - 2 \cdot 1$, $f(7) = 22 - 14 = 8 = 9 - (1)^2$.

Шаг 6. Оптимальные планы (x_1^*, x_2^*)

$$\boxed{(x_1^*, x_2^*) = \begin{cases} (0, X), & 0 \le X \le 1, \\ (X-1, 1), & 1 \le X \le 7, \\ (6, X-6), & 7 \le X \le 9. \end{cases}}$$

График функции $Y = f(X)$

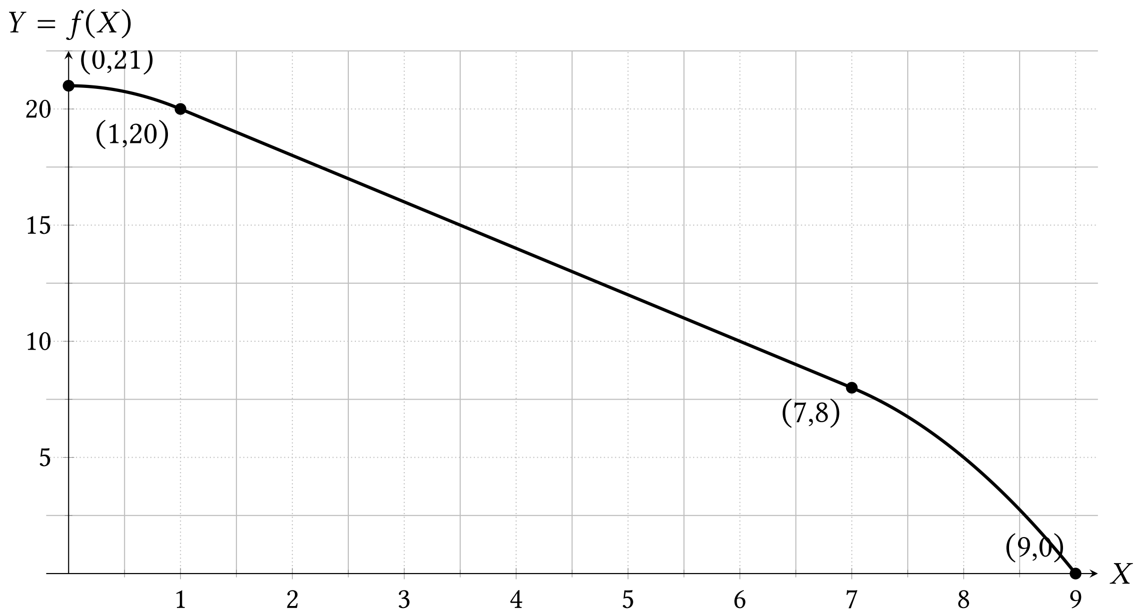

Рис. 2. График максимального значения $Y = f(X)$ на отрезке $X \in [0{,}9]$.

Интерпретация результата

- При малых $X \in [0{,}1]$ весь ресурс «уходит» во второй узел: $x_1^* = 0$, $x_2^* = X$; снижение Y квадратично, так как вторая связь содержит квадрат.
- При средних $X \in [1{,}7]$ оптимально держать $x_2 = 1$ (фиксированный уровень), а всё остальное отдать x_1; поэтому участок линейный.
- При больших $X \in [7{,}9]$ первый узел «насыщён» ($x_1 = 6$), рост идёт только через x_2, и снова действует квадрат — получаем ветвь параболы.

Задача 2 Построение графика (20 баллов)

Пусть функция $f(x)$ имеет вид: $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$, где $x \in R$.

а) (5 баллов) Определите все критические точки функции $f(x)$, то есть все значения x, при которых производная функции $f(x)$ либо равна нулю (экстремумы), либо не определена.

б) (4 балла) С помощью метода интервалов определите участки монотонности функции $f(x)$.

в) (3 балла) С помощью метода интервалов определите точки максимума и точки минимума функции $f(x)$, то есть такие значения x, при которых функция $f(x)$ принимает своё максимальное или минимальное значения (локально или глобально). Подробно объясните свой ответ.

г) (2 балла) Определите локальный максимум и локальный минимум функции $f(x)$, то есть максимальное и минимальное значения функции $f(x)$, кроме тех, где функция стремится по модулю к бесконечности.

д) (6 баллов) С помощью анализа производной функции $f(x)$, информации, полученной при анализе функции $f(x)$ с помощью метода интервалов, а также с помощью пределов функции $f(x)$ схематично изобразите график функции $f(x)$, отмечая все ключевые точки и асимптоты.

Михайлов Д. А.

Решение. **Идея метода.** Пользуемся **только** первой производной и методом интервалов:

1) находим $f'(x)$ и её нули (критические точки);

2) раскладываем $f'(x)$ на множители и анализируем её знак на интервалах;

3) по знаку $f'(x)$ определяем возрастание/убывание f и тип критических точек;

4) фиксируем ключевые точки (x- и y-пересечения, экстремумы) и по ним чертим аккуратный эскиз.

Шаг 1. Производная и критические точки.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3\big(x^2 - 2x - 3\big) = 3(x-3)(x+1).$$

Пояснение. Вынесли общий множитель 3, затем разложили квадратный трёхчлен на множители. Нули $f'(x)$ получаются из $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$:

$$\boxed{x = -1 \quad \text{и} \quad x = 3}.$$

Это и есть *критические точки.*

Шаг 2. Метод интервалов для $f'(x)$.

Так как $f'(x) = 3\,(x-3)\,(x+1)$, знаки на интервалах, задаваемых точками -1 и 3, получаются перемножением знаков факторов:

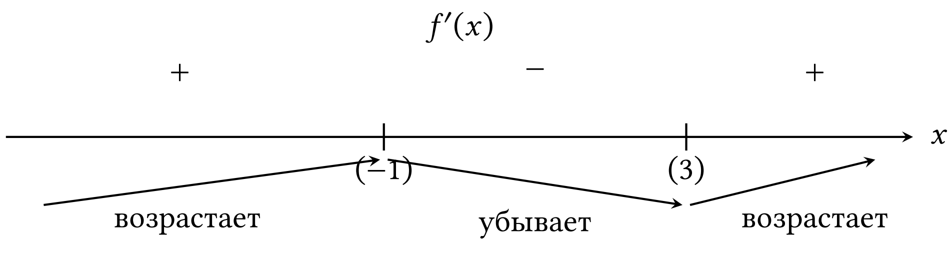

Рис. 1. Знакоопределённость $f'(x)$ и интервалы монотонности f.

Вывод о монотонности:

$$\boxed{f\uparrow \text{ на } (-\infty,-1), \qquad f\downarrow \text{ на } (-1,3), \qquad f\uparrow \text{ на } (3,+\infty)}.$$

Шаг 3. Классификация критических точек (первый признак по знаку f').

- При переходе через $x=-1$: знак f' меняется с $+$ на $-$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{локальный максимум в } x=-1}$.
- При переходе через $x=3$: знак f' меняется с $-$ на $+$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{локальный минимум в } x=3}$.

Значения функции в экстремумах:

$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2-9(-1)+11=-1-3+9+11=\boxed{16},$$

$$f(3)=27-27-27+11=\boxed{-16}.$$

Итак, $\boxed{(-1,16)}$ — локальный максимум, $\boxed{(3,-16)}$ — локальный минимум.

Шаг 4. Ключевые точки графика.

- Пересечение с осью Oy: $f(0)=11\Rightarrow(0,11)$.
- Нули функции. Заметим, что $f(1)=1-3-9+11=0\Rightarrow x=1$ — корень. Делим многочлен на $(x-1)$: $f(x)=(x-1)\big(x^2-2x-11\big)$. Отсюда остальные нули:

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+44}}{2}=1\pm2\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad \boxed{x_1=1-2\sqrt{3}\approx-2.464}, \boxed{x_2=1}, \boxed{x_3=1+2\sqrt{3}\approx4.464}.$$

- Поведение на бесконечности (старший коэффициент положителен): $f(x)\to-\infty$ при $x\to-\infty$ и $f(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$.
- Асимптоты отсутствуют (полином).

Ответы по пунктам задачи.

а) Критические точки: $\boxed{x=-1}$ и $\boxed{x=3}$.

б) Монотонность: $f\uparrow$ на $(-\infty,-1)$ и $(3,+\infty)$; $f\downarrow$ на $(-1,3)$.

в) Точки экстремума: локальный максимум $\boxed{(-1,16)}$, локальный минимум $\boxed{(3,-16)}$.

г) Локальные экстремальные значения: $\max\limits_{\text{лок}} f=16$ при $x=-1$; $\min\limits_{\text{лок}} f=-16$ при $x=3$.

д) На основе **а)–г)** строим аккуратный график ниже.

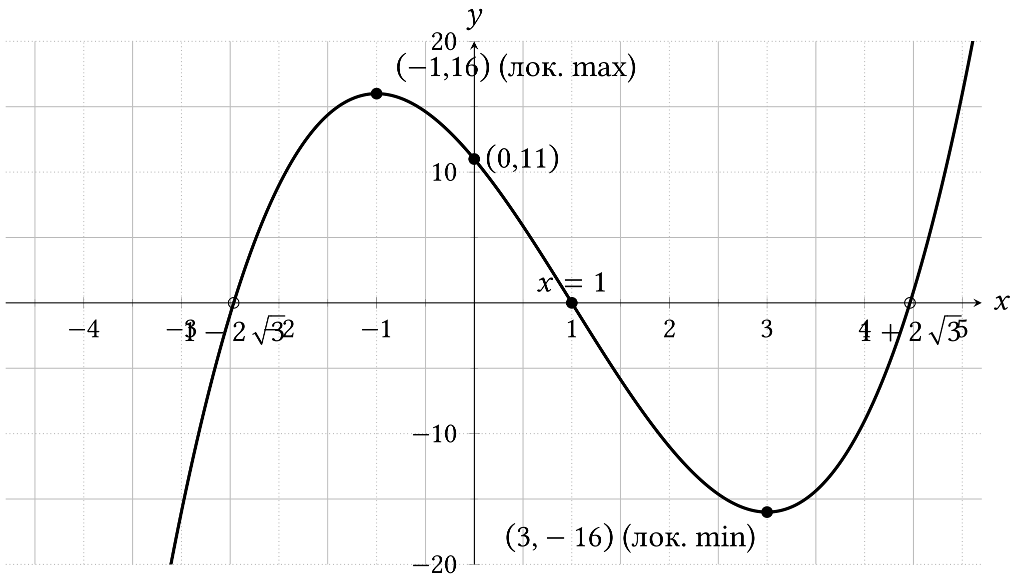

Рис. 2. Схематический, но точный график функции $f(x)$ по результатам анализа $f'(x)$.

Задача 3 Модулинг (20 баллов)

На координатной прямой даны точки: $A(-8), B(x), C(6)$. Известно, что расстояние от точки B до точки A на 14 больше, чем расстояние от точки B до точки C. При этом сумма расстояний от точки B до точек A и C равна 20.

Найдите все возможные значения x.

Малакшанидзе Аня

Решение.

а) Обозначим $u = |x+8|$ — расстояние BA, $v = |x-6|$ — расстояние BC.
По условию $u = v + 14$ и $u + v = 20$. Подставим первое во второе:

$$(v+14)+v = 20 \implies 2v + 14 = 20 \implies 2v = 6 \implies v = 3.$$

Тогда $u = v + 14 = 3 + 14 = 17$.
Итак необходимо решить систему

$$|x-6| = 3, \qquad |x+8| = 17.$$

Первое даёт $x = 6 \pm 3$, то есть $x = 9$ или $x = 3$. Проверим оба в втором: для $x = 9$ имеем $|9+8| = 17$ — подходит; для $x = 3$ имеем $|3+8| = 11 \neq 17$ — не подходит.
Также можно было решить второе: $|x+8| = 17 \Rightarrow x = 9$ или $x = -25$; при $x = -25$ первое даёт $|-25-6| = 31 \neq 3$.
Следовательно единственное значение x, удовлетворяющее всем условиям, — 9.

Задача 4 Роботы и инженеры (20 баллов)

Небольшая компания выпускает два типа роботов: «Максим» и «Полина». На предприятии работают инженеры двух категорий: опытные и стажёры. О работе предприятия за прошлую неделю известно следующее:

- Общее время, затраченное всеми инженерами на производство обоих типов роботов, составило 100 часов.
- Опытные инженеры трудились над «Максимами» и «Полинами» в сумме 64 часа (при этом общее время на «Максимов» и на «Полин» оказалось равно).
- Стажёры потратили на «Максимов» в два раза больше времени, чем на «Полин».

Сколько всего часов было затрачено на производство роботов «Максим» и сколько — на «Полин»?

Фазлыева Алина

Решение системы уравнений

1. Введение переменных

Пусть:

- M — время производства роботов «Максим»
- P — время производства роботов «Полина»
- m_c — время работы стажеров над «Максимом»
- p_c — время работы стажеров над «Полиной»

2. Составление системы уравнений

Из условий задачи составляем систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&(1) M + P = 100\\
&(2) M - m_c = P - p_c\\
&(3) (M - m_c) + (P - p_c) = 64\\
&(4) m_c = 2p_c
\end{aligned}
$$

+2 балла за каждое верное уравнение (всего 8 баллов за систему)

3. Решение системы

Шаг 3.1. Преобразуем уравнение (3):

$$M + P - (m_c + p_c) = 64$$

Подставляем $M + P = 100$ из уравнения (1):

$$100 - (m_c + p_c) = 64$$

$$m_c + p_c = 36(5)$$

Шаг 3.2. Подставляем $m_c = 2p_c$ из уравнения (4) в уравнение (5):

$$2p_c + p_c = 36$$

$$3p_c = 36$$

$$p_c = 12$$

Шаг 3.3. Находим m_c:

$$m_c = 2 \cdot 12 = 24$$

+3 балла за нахождение каждой из величин (всего 6 балла)

Шаг 3.4. Преобразуем уравнение (2):

$$M - m_c = P - p_c$$

$$M - P = m_c - p_c$$

Подставляем найденные значения $m_c = 24$, $p_c = 12$:

$$M - P = 24 - 12 = 12(6)$$

Шаг 3.5. Решаем систему из уравнений (1) и (6):

$$\begin{cases} M + P = 100 \\ M - P = 12 \end{cases}$$

Складываем уравнения:

$$2M = 112 \Rightarrow M = 56$$

Вычитаем второе уравнение из первого:

$$2P = 88 \Rightarrow P = 44$$

+3 балла за нахождение каждой из величин (всего 6 баллов)

Ответ

На производство роботов **«Максим»** затрачено **56 часов**, на **«Полина»** — **44 часа**.

Задача 5 Сделки города М (20 баллов)

В городе М живёт бесконечно большое количество жителей. Сделки между жителями происходят следующим образом:

- сначала первый житель покупает у второго товары и услуги на сумму 10 денежных единиц;
- второй житель покупает у третьего жителя товары и услуги на 80% от полученной суммы;
- третий житель покупает у четвёртого жителя товары и услуги на 80% от полученной суммы;

и так далее до бесконечности.

а) (6 баллов) На какую сумму всего будут заключены сделки между жителями города М?

б) (6 баллов) Пусть процесс заключения сделок между жителями города приостановился на жителе с номером $n+1$, т.е. житель с номером $n+1$ получил деньги по итогам своей сделки и решил ничего не тратить. На какую сумму всего будут заключены сделки между жителями города М? Чему равна средняя сумма сделки? Ответы на вопросы данного пункта должны зависеть от n.

в) (8 баллов) Пусть теперь процесс заключения сделок аналогичен процессу, описанному в изначальном условии, но каждый житель ещё дополнительно приплачивает определённую сумму при совершении сделки:

- сначала первый житель покупает у второго товары и услуги на сумму 10 денежных единиц;
- второй житель покупает у третьего жителя товары и услуги на 80% от полученной суммы плюс приплачивает ему 1 денежную единицу;
- третий житель покупает у четвёртого жителя товары и услуги на 80% от полученной суммы плюс приплачивает ему 0,8 денежной единицы (т.е. 80% от того, что приплатил предыдущий житель);

и так далее до бесконечности.

На какую сумму всего будут заключены сделки между жителями города М в данных условиях?

Челеховский А.Н.

Решение.

а) Первый житель покупает у второго на сумму 10 денежных единиц. Второй житель получает 10 денежных единиц и тратит 80% от этой суммы, т.е. $(0.8 \times 10 = 8)$

Третий житель получает 8 денежных единиц и тратит 80% от этой суммы, т.е. $(0.8 \times 8 = 6.4)$.

Четвертый житель получает 6.4 денежных единиц и тратит 80% от этой суммы, т.е. $(0.8 \times 6.4 = 5.12)$.

И так далее.

Таким образом, сумма сделок между жителями будет представлять собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию:

$S = 10 + 8 + 6.4 + 5.12 + \dots$

Каждый следующий член прогрессии равен 80% от предыдущего.

Обозначим сумму сделок как S:

$S = \sum_{k=0}^{\infty} 10 \cdot (0.8)^k$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом 10 и знаменателем 0.8 равна:

$\sum_{k=0}^{\infty} 10 \cdot (0.8)^k = \frac{10}{1-0.8} = 50$

б) Если процесс остановился на жителе $(n+1)$, то сумма сделок будет:

$S_n = 10 + 8 + 6.4 + \dots + 10 \cdot (0.8)^n$

Сумма первых n членов геометрической прогрессии:

$S_n = 10 \cdot \frac{1-(0.8)^n}{1-0.8} = 50(1-(0.8)^n) = 50 - 50(0.8)^n$

Средняя сумма сделки: Средняя сумма сделки будет равна общей сумме сделок, делённой на количество сделок:

Средняя сумма сделки = $\frac{S_n}{n} = \frac{50-50(0.8)^n}{n}$

в) Теперь рассмотрим ситуацию, когда каждый житель дополнительно приплачивает определённую сумму при совершении сделки.

Сумма сделок: Первый житель покупает у второго на сумму 10 денежных единиц. Второй житель получает 10 денежных единиц и тратит $0.8 \times 10 + 1 = 8 + 1 = 9$.

Третий житель получает 9 денежных единиц и тратит $(0.8 \times 9 + 0.8 = 7.2 + 0.8 = 8)$.

Четвёртый житель получает 8 денежных единиц и тратит $(0.8 \times 8 + 0.64 = 6.4 + 0.64 = 7.04)$.

И так далее до бесконечности.

Обозначим сумму сделок как (S):

$[S = 10 + 9 + 8 + 7.04 + \ldots]$

Каждая дополнительная выплата полрождает бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый член которой равен этой выплате и знаменатель равен 0,8.

Таким образом, общая сумма сделок будет равна:

$S = 50 + 1/0{,}2 + 0{,}8/0{,}2 + \ldots = 50 + (1/0{,}2)/0{,}2 = 75$