Отбор

Экономическая школа ФЭН
Профильная группа

28 сентября 2025 г.

При решении задач описывайте процесс решения. Если Вам кажется, что в условии задачи Вы сталкиваетесь с незнакомым для Вас термином — не спешите бросать задачу, вполне возможно, что, опираясь на здравый смысл, Вы сможете решить значительную её часть. Если у Вас есть идеи хода решения задачи — не бойтесь их записывать, это может принести Вам баллы за задачу. Если не сказано — считайте все величины во всех задачах бесконечно делимыми. Успехов!

Задача 1 Рынок труда города М (20 баллов)

В городе М на рынке труда работает фирма — монопсонист, использующая только труд и имеющая производственную функцию вида

$$Q(L) = \begin{cases} 120L - 0{,}5L^2, & \text{если } L \leqslant 120 \\ 7200, & \text{если } L > 120, \end{cases}$$

где Q — выпуск фирмы; L — количество занятых. Фирма продаёт свою продукцию на совершенно конкурентном рынке по цене $P = 1$.

а) (6 баллов) Работники города объединились в профсоюз, максимизирующий величину $U = wL$, где w — зарплата членов профсоюза. Профсоюз выбирает зарплату, а монопсонист выбирает занятость, принимая зарплату, установленную профсоюзом, как заданную. Определите, какая зарплата и какое количество занятых установятся в равновесии на рынке труда при данных условиях.

б) (6 баллов) Пусть теперь монопсонист устанавливает зарплату, а члены профсоюза принимают зарплату, установленную фирмой, как заданную, и имеют функцию предложения труда вида $L^s = 2w$. Определите, какая зарплата и какое количество занятых установятся в равновесии на рынке труда при данных условиях.

в) (8 баллов) Пусть профсоюз и монопсонист вступили между собой в переговоры, в результате которых они определяют зарплату и величину занятости. Возможно ли заключение такого контракта между профсоюзом и монопсонистом, при котором они оба выиграют по сравнению с пунктом **а)**? Возможно ли заключение такого контракта между профсоюзом и монопсонистом, при котором они оба выиграют по сравнению с пунктом **б)**? Возможно ли заключение такого контракта между профсоюзом и монопсонистом, при котором они оба выиграют и по сравнению с пунктом **а)**, и по сравнению с пунктом **б)**? Дайте экономическую интерпретацию полученного результата.

Челеховский А.Н.

Решение.

а) Профсоюз максимизирует $U = wL$

Выручка от продажи продукции:

$$TR(L) = P \cdot Q(L) = Q(L) = \begin{cases} 120L - 0.5L^2 & \text{если } L \leqslant 120 \\ 7200 & \text{если } L > 120 \end{cases}$$

Предельный денежный продукт труда:

$$MRPL = \frac{dTR}{dL} = \begin{cases} 120 - L & \text{если } L \leqslant 120 \\ 0 & \text{если } L > 120 \end{cases}$$

Поскольку MRP_L убывает с ростом L, а MC_L не изменяется с ростом L и производственная функция не имеет разрывов, монопсонист будет нанимать работников до тех пор, пока предельные затраты на труд (MC_L) не станут равны предельному денежному продукту труда (MRP_L): $MC_L = w\ MRP_L = 120 - L$ Таким образом, обратная функция спроса на труд имеет вид $w = 120 - L$

Подставим w в функцию U:

$U = (120 - L)L = 120L - L^2$

График данной функции имеет вид параболы с ветвями, направленными вниз относительно L; для максимизации U найдем производную и приравняем к нулю: $\frac{dU}{dL} = 120 - 2L = 0 \implies L = 60$. Подставим $L = 60$ в уравнение для w: $w = 120 - 60 = 60$.

Таким образом, в равновесии на рынке труда при данных условиях: Зарплата: $w = 60$ Количество занятых: $L = 60$

б) Монопсонист устанавливает w и выбирает L так, чтобы максимизировать свою прибыль. При этом: $TR(L) = 120L - 0.5L^2$ $TC(L) = wL$ $\pi = TR(L) - TC(L) = 120L - 0.5L^2 - wL$

Подставим $w = \frac{L^s}{2}$: $\pi = 120L - 0.5L^2 - \frac{L^2}{2} = 120L - L^2$

График данной функции имеет вид параболы с ветвями, направленными вниз относительно L; для максимизации найдем производную и приравняем к нулю: $\frac{d\pi}{dL} = 120 - 2L = 0 \implies L = 60$ Подставим $L = 60$ в функцию предложения труда: $L^s = 2w \implies 60 = 2w \implies w = 30$

Таким образом, в равновесии на рынке труда при данных условиях: Зарплата: $w = 30$ Количество занятых: $L = 60$

в) В пункте (а) профсоюз получает $w = 60$ и $L = 60$, что дает $U = 60 \cdot 60 = 3600$. В пункте (б) профсоюз получает $w = 30$ и $L = 60$, что дает $U = 30 \cdot 60 = 1800$.

Прибыль фирмы - наоборот, 1800 в пункте (а) и 3600 в пункте (б)

Контракт будет взаимовыгодным по сравнению с пунктом (а), если есть решение у системы уравнений:

$$\begin{cases} \pi = TR(L) - TC(L) = 120L - 0.5L^2 - wL > 1800 \\ wL > 3600 \end{cases}$$

Контракт будет взаимовыгодным по сравнению с пунктом (б), если есть решение у системы уравнений:

$$\begin{cases} \pi = TR(L) - TC(L) = 120L - 0.5L^2 - wL > 3600 \\ wL > 1800 \end{cases}$$

Обе данные системы уравнений сводятся к двойному неравенству.

В первом случае $120L - 0.5L^2 - 1800 > wL > 3600$

В первом случае $120L - 0.5L^2 - 3600 > wL > 1800$

Каждое из данных неравенстве имеет решение, если имеет решение неравенство $120L - 0.5L^2 - 5400 > 0$. Данное неравенство имеет решение при $60 < L < 180$, что попадает в интервал $L < 120$, поэтому да, решение есть.

И фирме, и профсоюзу станет лучше по сравнению с обоими пунктами, если имеет решение система неравенств

$$\begin{cases} \pi = TR(L) - TC(L) = 120L - 0.5L^2 - wL > 3600 \\ wL > 3600 \end{cases}$$

Получаем двойное неравенство

$120L - 0.5L^2 - 3600 > wL > 3600$, которое имеет решение, если имеет решение уравнение $120L - 0.5L^2 - 7200 = -0{,}5(L - 120)^2 > 0$. У данного неравенства нет решений.

Также заметим, что нет решений при $L > 120$, т.к. нет решений у системы неравенств

$$\begin{cases} 7200 - wL > 3600 \\ wL > 3600 \end{cases}$$

Отсюда легко видно противоречие $wL > 3600$ и $wL < 3600$

Переговоры могут привести к более выгодным условиям для каждой сторон как в случае монополии на рынке труда, так и в случае монопсонии на рынке труда, но сделать каждому лучше по сравнению с его лучшим положением на рынке такие переговоры не могут позволить.

Задача 2 Сладкое преступление (20 баллов)

Детектив сладкого Королевства *Джон «Лакрица» Смит* занимается расследованиями особо запутанных преступлений на сладкой почве. На данный момент он расследует ограбление магазина сладостей *«Сахарный Дом»* на пересечении улицы Пончиков и Мармеладного переулка. Подозреваемый в ограблении магазина носит кличку *«Карамельный Пончик»*. Недавно человека, попадающего под описание *Карамельного Пончика*, видели в магазине сладостей *«Карамельные облака»*, где он приобрел 3 сливочные шоколадки по \$10 за плитку и 4 банки вишневой газировки по \$5 за банку. К сожалению, далее след обрывается. Месяц нудных поисков и опросов свидетелей вывели *Лакрицу* на трёх подозреваемых из разных районов королевства, которые попадают под описание преступника, а также любят те же сливочные шоколадки и вишневую газировку, что и человек замеченный в магазине *«Карамельные облака»* ранее. *Лакрица* собрал следующую информацию по подозреваемым:

- *Кремовая Мэри* — покупает 2 сливочных шоколадки по \$5 за плитку и 5 вишневых газировки по \$15 за банку;
- *Халва Сэм Джелато* — покупает 2 сливочные шоколадки по \$15 за плитку и 4 вишневые газировки по \$5 за банку;
- *Мармелад Лукумович* — покупает 4 сливочные шоколадки по \$5 за плитку и 2 вишневые газировки по \$20 за банку.

Известно, что *Карамельный Пончик* и все три подозреваемых тратят весь свой доход на шоколадки и газировку. Назовём покупку определенного количества шоколадок и газировки **набором**. Каждый является **рациональным покупателем**:

- Если покупатель мог позволить себе купить любой один из двух наборов: *набор A* или *набор B*, и в итоге купил *набор A*, то никогда не будет такого, что он в следующую покупку снова может позволить себе купить любой один из двух наборов, но теперь покупает *набор B*.
- Если покупатель мог позволить себе купить любой один из двух наборов: *набор A* или *набор B*, и в итоге купил *набор B*, а затем покупатель в следующую покупку мог позволить купить себе любой один из двух наборов: *набор B* или *набор C*, и в итоге купил *набор C*, то никогда не будет такого, что в следующую покупку он мог позволить купить себе любой один из двух наборов: *набор A* или *набор C*, и в итоге покупает *набор A*.

а) (10 баллов) Может ли *Лакрица* сузить круг подозреваемых, основываясь на приведённой в условии информации? Если Ваш ответ "да" - покажите, как это сделать, если "нет" - докажите, почему это нельзя сделать.

б) (10 баллов) Недавно *Карамельный Пончик* был снова замечен в магазине сладостей, где он купил 5 сливочных шоколадок по \$10 за плитку и 1 вишневую газировку по \$10 за банку. Выясните, кто является преступником.

Михайлов Д. А.

Решение. **Данные задачи**. Обозначим товары: x — сливочная шоколадка (шт.), y — вишнёвая газировка (банки).

Наблюдение 1 (в магазине «Карамельные облака»):

$$p^{(1)} = (p_x, p_y) = (10,5), \quad x^{(1)} = (x,y) = (3,4), \quad I^{(1)} = \underbrace{10 \cdot 3}_{30} + \underbrace{5 \cdot 4}_{20} = 50.$$

Подозреваемые:

Имя	цены $p = (p_x, p_y)$	выбор $x = (x, y)$	расход $I = p \cdot x$
Кремовая Мэри	(5,15)	(2,5)	$5 \cdot 2 + 15 \cdot 5 = 85$
Халва Сэм Джэлато	(15,5)	(2,4)	$15 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 50$
Мармелад Лукумович	(5,20)	(4,2)	$5 \cdot 4 + 20 \cdot 2 = 60$

Наблюдение 2 (повторное появление в магазине):

$$p^{(3)} = (10,10), \qquad x^{(3)} = (5,1), \qquad I^{(3)} = 10 \cdot 5 + 10 \cdot 1 = 60.$$

Определения..

WARP (слабая аксиома выявленных предпочтений): если при ценах p выбран набор x и другой набор y был (нестрого) доступен, $p \cdot y \le p \cdot x$, то не может случиться, что при каких-либо ценах p' выбран y, когда x *строго* доступен, $p' \cdot x < p' \cdot y$.
SARP (строгая аксиома): отсутствуют циклы выявленных предпочтений, содержащие хотя бы одно строгое звено (обеспечивает рациональность со строгой вогнутостью/единственностью оптимума).

I. Численное решение: WARP_NUMBERS_SOL

(a) Сужаем круг подозреваемых по первому наблюдению

Кремовая Мэри..

$p^{(1)} \cdot x^{(M)} = 10 \cdot 2 + 5 \cdot 5 = 45 \le 50$ — её набор был *доступен* в магазине.
$p^{(M)} \cdot x^{(1)} = 5 \cdot 3 + 15 \cdot 4 = 75 < 85$ — набор короля *строго доступен* по её ценам.
Получаем «крест-накрест» выборы при взаимной доступности (в одном месте строго) ⇒ **нарушение WARP**.

$$\Rightarrow \textbf{ Мэри исключается.}$$

Халва Сэм Джэлато.

$p^{(1)} \cdot x^{(S)} = 10 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 40 \le 50$ — набор Сэма был доступен в магазине (дешевле).
$p^{(S)} \cdot x^{(1)} = 15 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 65 > 50$ — королевский набор *недоступен* по ценам Сэма.
Противоречия WARP нет.

$$\Rightarrow \textbf{ Сэм остаётся возможным.}$$

Мармелад Лукумович.

$p^{(1)} \cdot x^{(L)} = 10 \cdot 4 + 5 \cdot 2 = 50 = I^{(1)}$ — набор Лукумовича был доступен.
$p^{(L)} \cdot x^{(1)} = 5 \cdot 3 + 20 \cdot 4 = 95 > 60$ — королевский набор *недоступен* по его ценам.
Противоречия WARP нет.

$$\Rightarrow \textbf{ Лукумович тоже остаётся возможным.}$$

Вывод по (a): после первого наблюдения круг сужается до двух: {**Халва Сэм Джэлато**, **Мармелад Лукумович**}.

(b) Второе наблюдение и окончательный выбор

Проверим Лукумовича на SARP. При его ценах $p^{(L)} = (5,20)$ набор $x^{(3)} = (5,1)$ *строго доступен*:

$$p^{(L)} \cdot x^{(3)} = 5 \cdot 5 + 20 \cdot 1 = 45 < 60 = p^{(L)} \cdot x^{(L)}.$$

Значит $x^{(L)}$ строго выявленно *предпочитается* $x^{(3)}$.
А при $p^{(3)} = (10,10)$: $p^{(3)} \cdot x^{(L)} = 10 \cdot 4 + 10 \cdot 2 = 60 = I^{(3)}$ — оба, $x^{(3)}$ и $x^{(L)}$, на бюджетной. Выбран $x^{(3)} \Rightarrow x^{(3)} \succeq x^{(L)}$.
Получаем цикл $x^{(L)} \succ x^{(3)} \succeq x^{(L)}$ со строгим звеном ⇒ **нарушение SARP**.

$$\Rightarrow \textbf{ Лукумович исключается.}$$

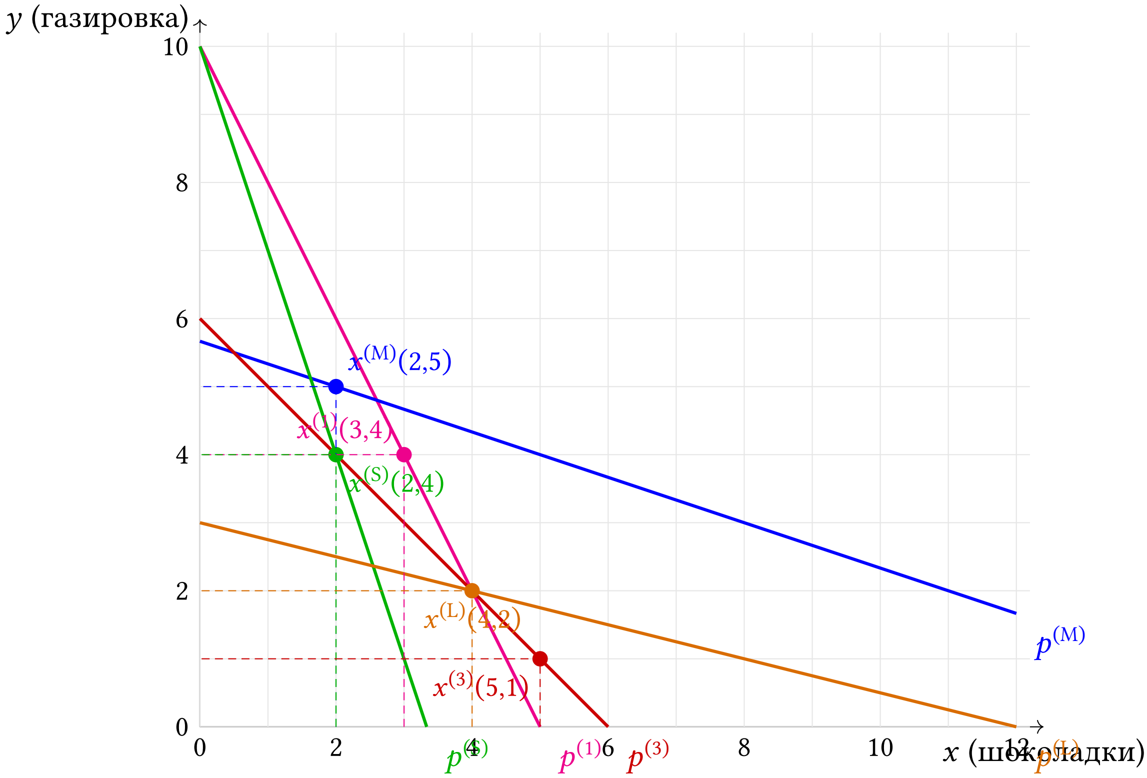
Проверим Сэма Джэлато.

При его ценах $p^{(S)} = (15{,}5)$: $p^{(S)} \cdot x^{(3)} = 15 \cdot 5 + 5 \cdot 1 = 80 > 50$ — $x^{(3)}$ *недоступен.*
При $p^{(3)}$: $p^{(3)} \cdot x^{(S)} = 10 \cdot 2 + 10 \cdot 4 = 60 = I^{(3)}$ — $x^{(S)}$ лежит на бюджетной линии вместе с $x^{(3)}$. Никакого строгого обратного выбора нет.
$\Rightarrow$ Набор наблюдений $\{(p^{(1)},x^{(1)}),(p^{(S)},x^{(S)}),(p^{(3)},x^{(3)})\}$ удовлетворяет GARP/SARP.

Итог: преступник — $\boxed{\textbf{Халва Сэм Джэлато}}$.

II. Геометрическое решение: WARP_GRAPH_SOL

Ниже строим бюджетные линии и отмечаем выборы. График увеличен, но остаётся в пределах страницы; подписи координат точек смещены, чтобы не перекрывать друг друга.



Как читать рисунок.

- **(a)** На малиновой линии (магазин) точка $x^{(M)}$ лежит внутри (слева/выше), т.е. доступна; на синей линии (цены Мэри) точка $x^{(1)}$ тоже внутри — *строго* доступна. Выборы крест-накрест $\Rightarrow$ **Мэри нарушает WARP** и исключается.
- **(a)** Зелёная (**Сэм Джэлато**): при его ценах точка $x^{(1)}$ вне бюджета — недоступна, поэтому противоречия нет; оранжевая (**Лукумович**): при его ценах $x^{(1)}$ тоже вне бюджета — противоречия нет. Остаются двое.
- **(b)** Красная линия (второе наблюдение): точка $x^{(L)}$ лежит на красной бюджетной, но при оранжевых ценах точка $x^{(3)}$ была *строго* доступна; выбран же был $x^{(L)}$. Получается цикл со строгим звеном $\Rightarrow$ **Лукумович нарушает SARP** и отсекается.

Финальный вывод (в обоих подходах): $\boxed{\text{Карамельный Пончик} = \textbf{Халва Сэм Джэлато}.}$

Почему оба подхода важны

- WARP_NUMBERS_SOL даёт формально корректные проверки доступности/строгости через скалярные произведения $p \cdot x$ и сразу видны места нарушения аксиом.
- WARP_GRAPH_SOL делает те же логические шаги интуитивными: бюджетные прямые, взаимное расположение точек и наглядные «кресты» нарушений.

Задача 3 Минимизация издержек (20 баллов)

Производственная функция фирмы выглядит следующим образом: $q = f(K,L) = K + \sqrt{L+4}$, где q — это количество произведённой продукции, K — это количество используемых в производстве единиц капитала, а L — это количество используемых в производстве единиц труда. Цена единицы труда равна $w > 0$, а цена единицы капитала равна $r > 0$. Фирма работает в долгосрочном периоде, то есть количества всех факторов производства являются переменными. Фирма стремится минимизировать общие издержки для каждого возможного количества произведенной фирмой продукции q.

а) (4 балла) Определите отдачу от масштаба для данной производственной функции.

б) (1 балл) Запишите задачу минимизации общих издержек данной фирмы.

в) (15 баллов) Решите задачу минимизации общих издержек данной фирмы и выведите функцию $TC(q)$.

Махаев Д. Д.

Решение. **Дано**. Производственная функция: $q = K + \sqrt{L+4}$, $K \geqslant 0$, $L \geqslant 0$. Цены факторов: $r > 0$ (капитал), $w > 0$ (труд). В долгом периоде оба фактора переменные. Заметим, что $q_{\min} = 2$ (при $K = L = 0$), поэтому далее предполагаем $q \geqslant 2$.

а) Для $\lambda > 1$:

$$f(\lambda K,\lambda L) = \lambda K + \sqrt{\lambda L + 4} < \lambda K + \sqrt{\lambda(L+4)} = \lambda K + \sqrt{\lambda}\sqrt{L+4} \leqslant \lambda f(K,L).$$

Неравенство строгое из-за постоянной +4 под корнем. Следовательно, отдача от масштаба *убывающая*.

б)

$$\min_{K,L\geqslant 0} C = rK + wL \quad \text{при} \quad K + \sqrt{L+4} = q.$$

Исключим L: $\sqrt{L+4} = q - K \Rightarrow L = (q-K)^2 - 4$. Так как $L \geqslant 0$ и $q - K \geqslant 2$, получаем допустимый отрезок для K:

$$0 \leqslant K \leqslant q - 2.$$

в) Подставляя L, имеем

$$C(K) = rK + w\big((q-K)^2 - 4\big) = wK^2 + (r - 2wq)K + w(q^2 - 4), \qquad K \in [0, q-2].$$

Первая производная:

$$C'(K) = 2wK + (r - 2wq).$$

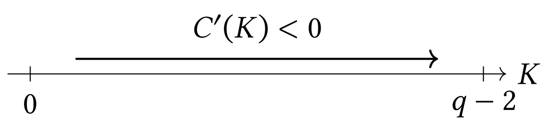
Стационарная точка (вершина параболы):

$$K^\star = q - \frac{r}{2w}.$$

Метод интервалов: знаки $C'(K)$ на допустимом отрезке

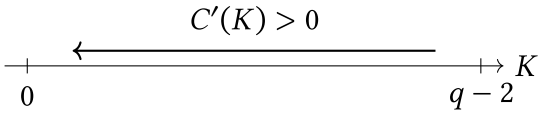
Случай A: $r < 4w$ **(вершина правее отрезка).** Тогда $K^\star > q - 2$, и $C'(K) < 0$ на всём $[0, q-2]$. Минимум на правой границе:

$$K^{\text{opt}} = q - 2, \quad L^{\text{opt}} = 0, \quad \boxed{TC(q) = r(q-2)}.$$



Случай B1: $r \geqslant 4w$ и $2 \leqslant q \leqslant \dfrac{r}{2w}$ (вершина левее отрезка). Тогда $K^\star \leqslant 0$, $C'(K) \geqslant 0$ на всём $[0,q-2]$. Минимум на левой границе:

$$K^{\text{opt}} = 0, \quad L^{\text{opt}} = q^2 - 4, \quad \boxed{TC(q) = w(q^2-4)}.$$

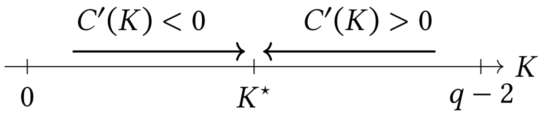


Случай B2: $r \geqslant 4w$ и $q \geqslant \dfrac{r}{2w}$ (внутренний минимум). Здесь $K^\star \in [0,q-2]$ и

$$C'(K) \begin{cases} < 0, & 0 \leqslant K < K^\star, \\ = 0, & K = K^\star, \\ > 0, & K^\star < K \leqslant q-2. \end{cases}$$

Следовательно,

$$K^{\text{opt}} = q - \frac{r}{2w}, \qquad L^{\text{opt}} = \left(\frac{r}{2w}\right)^2 - 4, \qquad \boxed{TC(q) = rq - \frac{r^2}{4w} - 4w}.$$



Непрерывность на стыке. При $q = \frac{r}{2w}$: $w(q^2-4) = \dfrac{r^2}{4w} - 4w = rq - \dfrac{r^2}{4w} - 4w$. В точке $q = 2$ издержки равны нулю.

Итоговые формулы

$$TC(q) = \begin{cases} r(q-2), & r < 4w,\ q \geqslant 2, \\ w(q^2-4), & r \geqslant 4w,\ 2 \leqslant q \leqslant \dfrac{r}{2w}, \\ rq - \dfrac{r^2}{4w} - 4w, & r \geqslant 4w,\ q \geqslant \dfrac{r}{2w}. \end{cases}$$

$$(K^{\text{opt}}, L^{\text{opt}}) = \begin{cases} (q-2,\ 0), & r < 4w, \\ (0,\ q^2-4), & r \geqslant 4w,\ 2 \leqslant q \leqslant \dfrac{r}{2w}, \\ \left(q - \dfrac{r}{2w},\ \left(\dfrac{r}{2w}\right)^2 - 4\right), & r \geqslant 4w,\ q \geqslant \dfrac{r}{2w}. \end{cases}$$

Задача 4 В погоне за совершенством (20 баллов)

На совершенно конкурентном рынке товара отраслевой спрос имеет вид: $Q = 1000 - 10P$, где Q — суммарный выпуск отрасли, P — цена. Каждая фирма в отрасли имеет функцию общих издержек: $TC_f(q) = 100 + 20q + q^2$, где q — выпуск отдельной фирмы.

а) (10 баллов) Определите количество фирм на данном рынке В условиях долгосрочного равновесия.

б) (10 баллов) Пусть n фирм (где n равно числу фирм, найденному Вами в пункте **а)**) объединились и стали монополистом на данном рынке. Найдите их оптимальный суммарный выпуск Q_M и соответствующую цену P_M. Считайте, что при объединении фирмы максимизируют их суммарную прибыль.

Малакшанидзе Аня

Решение.

а) В долгосрочном равновесии фирмы работают в точке минимума средних издержек, т.е. находим минимум

$$ATC(q) = \frac{TC_f(q)}{q} = \frac{100}{q} + 20 + q.$$

Найдём производную и приравняем к нулю:

$$\frac{d\,ATC}{dq} = -\frac{100}{q^2} + 1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{100}{q^2} = 1 \quad\Longrightarrow\quad q^2 = 100.$$

Берём положительный корень:

$$q^* = 10.$$

Подставим в ATC для цены в долгорочном равновесии (нулевая экономическая прибыль):

$$P_{PC} = ATC(q^*) = \frac{100}{10} + 20 + 10 = 10 + 20 + 10 = 40.$$

Совокупный выпуск отрасли при этой цене по функции спроса:

$$Q_{PC} = 1000 - 10P_{PC} = 1000 - 10 \cdot 40 = 1000 - 400 = 600.$$

Число фирм:

$$n = \frac{Q_{PC}}{q^*} = \frac{600}{10} = 60.$$

б) Совокупные издержки монополии равны сумме фиксированных и переменных издержек всех прежних фирм. Для одной фирмы фиксированная часть равна 100, поэтому суммарные фиксированные издержки при n фирмах:

$$\mathrm{FC}_{tot} = n \cdot 100.$$

Если монополист выпускает общий объём Q, то раньше при равномерном распределении каждой фирме соответствовал объём $q = Q/n$. Сумма переменных издержек всех фирм даёт

$$\sum\left(20q + q^2\right) = n\left(20\frac{Q}{n} + \left(\frac{Q}{n}\right)^2\right) = 20Q + \frac{Q^2}{n}.$$

Итого:

$$TC_{mon}(Q) = n \cdot 100 + 20Q + \frac{Q^2}{n}.$$

Подставляем найденное $n = 60$:

$$TC_{mon}(Q) = 6000 + 20Q + \frac{Q^2}{60}.$$

Найдём предельные издержки монополии:

$$MC_{mon}(Q) = \frac{dTC_{mon}}{dQ} = 20 + \frac{2Q}{60} = 20 + \frac{Q}{30}.$$

Выручка и предельная выручка:

$$TR(Q) = P(Q)\,Q = (100 - 0.1Q)Q = 100Q - 0.1Q^2,$$

$$MR(Q) = \frac{dTR}{dQ} = 100 - 0.2Q.$$

Условие оптимума монополии: $MR = MC$:

$$100 - 0.2Q = 20 + \frac{Q}{30}.$$

Переносим члены:

$$100 - 20 = 0.2Q + \frac{Q}{30} \quad \Longrightarrow \quad 80 = Q\Big(0.2 + \frac{1}{30}\Big).$$

Приведём коэффициенты к общей дроби: $0.2 = \frac{1}{5} = \frac{6}{30}$, значит

$$0.2 + \frac{1}{30} = \frac{6}{30} + \frac{1}{30} = \frac{7}{30}.$$

Отсюда

$$Q_M = \frac{80}{7/30} = 80 \cdot \frac{30}{7} = \frac{2400}{7}.$$

Цена монополии:

$$P_M = P(Q_M) = 100 - 0.1Q_M = 100 - 0.1 \cdot \frac{2400}{7} = 100 - \frac{240}{7} = \frac{460}{7}.$$

Задача 5 Поиск справедливой стоимости облигации (20 баллов)

Думаем, вы уже слышали про облигации — а может, даже решали задачи на поиск их справедливой стоимости. Сегодня вам предстоит познакомиться поближе с разными видами облигаций и попробовать посчитать их цену.

Вам не нужно полностью производить все расчеты, ответ для каждого пункта запишите в виде дроби со знаменателем, который имеет вид произведения ставок дисконтирования в каждый год.

Вы хотите купить облигацию номиналом 1000 рублей со сроком до погашения 4 года. Прогноз ключевой ставки на ближайшие годы выглядит так:

- 1-й год — 20%
- 2-й год — 18%
- 3-й год — 16%
- 4-й год — 14%

В каждом из пунктов определите справедливую цену облигации в зависимости от её типа.

а) (10 баллов) Вы рассматриваете облигацию с постоянным купоном в размере 18% от номинала. Найдите её текущую цену. Не доводя расчеты до конца определите, больше или меньше номинала будет текущая цена облигации.

б) (5 баллов) На рынке есть облигация с тем же номиналом, сроком и купонной ставкой, но с особенностью: это амортизируемая облигация.

Амортизируемые облигации — это бумаги, у которых номинал погашается не в конце срока, а постепенно, равными частями в даты выплаты купонов. При этом купоные выплаты расчитываются как процент от непогашенного (остаточного) номинала.

Найдите текущую цену такой облигации. Не доводя расчеты до конца определите, больше или меньше номинала будет текущая цена облигации.

в) (5 баллов) Теперь вы встречаете облигацию с переменным купоном (флоатер). Купон по ней составляет ключевую ставку плюс 2%. Остальные характеристики совпадают с предыдущими пунктами. Найдите текущую цену такой облигации. Не доводя расчеты до конца определите, больше или меньше номинала будет текущая цена облигации.

Фазлыева Алина

Условие задачи

Номинал облигации: $N = 1000$ рублей.
Срок до погашения: 4 года.
Прогноз ключевой ставки:

- 1-й год: $r_1 = 20\% = 0.20$
- 2-й год: $r_2 = 18\% = 0.18$
- 3-й год: $r_3 = 16\% = 0.16$
- 4-й год: $r_4 = 14\% = 0.14$

Обозначим произведение знаменателей:

$$D = (1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3)(1 + r_4) = 1.20 \times 1.18 \times 1.16 \times 1.14$$

а) Облигация с постоянным купоном 18%

Купонный платеж: $C = 1000 \times 0.18 = 180$ рублей.

Формула для текущей цены:

$$P = \frac{C}{1+r_1} + \frac{C}{(1+r_1)(1+r_2)} + \frac{C}{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)} + \frac{C+N}{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)}$$

Приведем к общему знаменателю D:

$$P = \frac{C(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4) + C(1+r_3)(1+r_4) + C(1+r_4) + (C+N)}{D}$$

Подставляем числовые значения:

$$P = \frac{180 \times 1.18 \times 1.16 \times 1.14 + 180 \times 1.16 \times 1.14 + 180 \times 1.14 + 1180}{D}$$

Вычисляем числитель:

$$180 \times 1.18 \times 1.16 \times 1.14 = 180 \times 1.560144 \approx 280.83$$
$$180 \times 1.16 \times 1.14 = 180 \times 1.3224 \approx 238.03$$
$$180 \times 1.14 = 205.20$$
$$\text{Сумма с номиналом: } 280.83 + 238.03 + 205.20 + 1180 = 1904.06$$

Вычисляем знаменатель:

$$D = 1.20 \times 1.18 \times 1.16 \times 1.14 = 1.20 \times 1.560144 \approx 1.87217$$

Итоговая цена:

$$P = \frac{1904.06}{1.87217} \approx 1017.03 \text{ рублей}$$

Ответ: Справедливая цена облигации составляет

$$P = \frac{180 \times 1.18 \times 1.16 \times 1.14 + 180 \times 1.16 \times 1.14 + 180 \times 1.14 + 1180}{D} = \frac{1904.06}{D}$$

Важно: вычислять значение знаменателя не обязательно

Качественный вывод (без численных вычислений). Среднее значение прогнозируемых ставок за четыре года равно

$$\bar{r} = \frac{20\% + 18\% + 16\% + 14\%}{4} = 17\%.$$

Купонная ставка 18% чуть превышает это среднее, значит в среднем купон выше рыночной доходности по бумагам с аналогичным риском, поэтому ожидаем, что $P_a > N$. Более формально: сумма дисконтированн купонов при ставке купона выше "средней дисконтной" даёт премию к номиналу, то есть цена будет немного больше 1000 руб.

б) Амортизируемая облигация

Ежегодное погашение номинала: $A = \frac{1000}{4} = 250$ рублей.

Денежные потоки по годам:

- **1-й год:** Купон от 1000 руб.: $1000 \times 0.18 = 180$ руб. + погашение номинала 250 руб. = 430 руб.
- **2-й год:** Остаток номинала: $1000 - 250 = 750$ руб. Купон: $750 \times 0.18 = 135$ руб. + погашение 250 руб. = 385 руб.

- **3-й год:** Остаток номинала: $750 - 250 = 500$ руб. Купон: $500 \times 0.18 = 90$ руб. + погашение 250 руб. $= 340$ руб.

- **4-й год:** Остаток номинала: $500 - 250 = 250$ руб. Купон: $250 \times 0.18 = 45$ руб. + погашение 250 руб. $= 295$ руб.

Формула для текущей цены:

$$P = \frac{430}{1+r_1} + \frac{385}{(1+r_1)(1+r_2)} + \frac{340}{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)} + \frac{295}{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)}$$

Приведем к общему знаменателю D:

$$P = \frac{430(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4) + 385(1+r_3)(1+r_4) + 340(1+r_4) + 295}{D}$$

Подставляем числовые значения:

$$P = \frac{430 \times 1.18 \times 1.16 \times 1.14 + 385 \times 1.16 \times 1.14 + 340 \times 1.14 + 295}{D}$$

Вычисляем числитель:

$$\begin{aligned}
&430 \times 1.18 \times 1.16 \times 1.14 = 430 \times 1.560144 \approx 670.86 \\
&385 \times 1.16 \times 1.14 = 385 \times 1.3224 \approx 509.12 \\
&340 \times 1.14 = 387.60 \\
&\text{Сумма: } 670.86 + 509.12 + 387.60 + 295 = 1862.58
\end{aligned}$$

Итоговая цена:

$$P = \frac{1862.58}{D} = \frac{1862.58}{1.87217} \approx 995.02 \text{ рублей}$$

Ответ: Справедливая цена амортизируемой облигации составляет **995 рублей**. Важно: вычислять значение знаменателя не обязательно

Качественный вывод (без численных вычислений).
По сравнению с облигацией с постоянным купоном та же совокупность платежей по номиналу и купонам распределена иначе: амортизация возвращает часть номинала раньше, а купоны начисляются на уменьшающийся остаток. При прочих равных это обычно уменьшает суммарную приведённую стоимость купонных выплат (они начисляются на меньшую базу в последующие годы), и итоговая цена часто оказывается меньше цены облигации с постоянным купоном с тем же купоном. В данном случае ожидается, что $P_b < N$ (и также обычно $P_b < P_a$, но конкретный вывод требует численного сравнения).

в) Облигация с переменным купоном (флоатер)

Купонные ставки: ключевая ставка + 2%

- 1-й год: $20\% + 2\% = 22\%$, купон: $1000 \times 0.22 = 220$ руб.

- 2-й год: $18\% + 2\% = 20\%$, купон: $1000 \times 0.20 = 200$ руб.

- 3-й год: $16\% + 2\% = 18\%$, купон: $1000 \times 0.18 = 180$ руб.

- 4-й год: $14\% + 2\% = 16\%$, купон: $1000 \times 0.16 = 160$ руб.

Для флоатера используем метод дисконтирования с конца:

$$P_3 = \frac{N + C_4}{1 + r_4} = \frac{1000 + 160}{1.14} = \frac{1160}{1.14} \approx 1017.54$$
$$P_2 = \frac{C_3 + P_3}{1 + r_3} = \frac{180 + 1017.54}{1.16} = \frac{1197.54}{1.16} \approx 1032.36$$
$$P_1 = \frac{C_2 + P_2}{1 + r_2} = \frac{200 + 1032.36}{1.18} = \frac{1232.36}{1.18} \approx 1044.37$$
$$P_0 = \frac{C_1 + P_1}{1 + r_1} = \frac{220 + 1044.37}{1.20} = \frac{1264.37}{1.20} \approx 1053.64$$

Формула в общем виде:

$$P = \frac{C_1(1 + r_2)(1 + r_3)(1 + r_4) + C_2(1 + r_3)(1 + r_4) + C_3(1 + r_4) + (C_4 + N)}{D}$$

Подставляем значения:

$$P = \frac{220 \times 1.18 \times 1.16 \times 1.14 + 200 \times 1.16 \times 1.14 + 180 \times 1.14 + 1160}{D}$$

Вычисляем числитель:

$$220 \times 1.18 \times 1.16 \times 1.14 = 220 \times 1.560144 \approx 343.23$$
$$200 \times 1.16 \times 1.14 = 200 \times 1.3224 \approx 264.48$$
$$180 \times 1.14 = 205.20$$
$$\text{Сумма с номиналом: } 343.23 + 264.48 + 205.20 + 1160 = 1972.91$$

Итоговая цена:

$$P = \frac{1972.91}{D} = \frac{1972.91}{1.87217} \approx 1054.02 \text{ рублей}$$

Ответ: Справедливая цена флоатера составляет **1054 рубля**.

Важно: вычислять значение знаменателя не обязательно

Качественный вывод (без численных вычислений).
В каждый год купонная ставка для флоатера превышает соответствующую ставку жисконтирования на 2% (поскольку купон равен $r_t + 2\%$, а дисконтирование идёт по r_t). Это означает, что купонные платежи дают положительную надбавку — поэтому итоговая цена P_c будет больше номинала N.

Краткая сводка

$$\boxed{\begin{aligned} P_a &= \frac{1904.06}{D}, \quad (\text{ожидаемо } P_a > 1000); \\ P_b &= \frac{1862.58}{D}, \quad (\text{ожидаемо } P_b < 1000); \\ P_c &= \frac{1972.91}{D}, \quad (\text{точно } P_c > 1000). \end{aligned}}$$

Критерии оценивания

Пункт а)

Расчет купонного платежа +2 балла
Запись формулы стоимости облигации в общем виде +2 балла
Приведение цены к общему знаменателю +2 балла
Вычисление числителя +2 балла
Вывод о том, что цена выше номинала +2 балла

Пункт б)

Расчет амортизации за год +1 балл
Расчет купонов за каждый год +2 балла
Вычисление числителя +1 балл
Вывод о том, что цена ниже номинала +1 балл

Пункт в)

Расчет купонов за каждый год +2 балла
Вычисление числителя +1 балл
Вывод о том, что цена выше номинала +2 балла