Свойства параболического и гиперболического 2-го порядка возмущений симметричной гиперболической системы 1-го порядка с приложениями к системе уравнений газовой динамики

А.А. Злотник (НИУ Высшая школа экономики, департамент математики и ИПМ им. М.В. Келдыша)
соавтор: Б.Н. Четверушкин (ИПМ им. М.В. Келдыша)

Конференция "Вычислительная математика и приложения"
18-22 августа 2025 г.
Международный математический центр Сириус

1. Введение
2. Функциональные пространства
3. Задача Коши для симметричной гиперболической системы 1-го порядка
4. Задача Коши для параболической системы уравнений 2-го порядка – возмущения исходной системы
5. Задача Коши для гиперболической системы уравнений 2-го порядка – возмущения исходной системы
6. Оценки разности решений задач Коши для системы уравнений 1-го порядка и ее возмущений
7. Оценки производных решений задач Коши и разностей их решений в случае постоянных по пространству коэффициентов
8. Линеаризованные на постоянном решении КГД системы уравнений и их свойства
9. Публикации

Введение

Изучаются задачи Коши для n-мерной симметричной гиперболической системы уравнений 1-го порядка с переменными коэффициентами и ее сингулярных возмущений – сильно параболической и гиперболической 2-го порядка систем уравнений с малым параметром $\tau > 0$ при вторых производных по x и t. Возмущения со вторыми производными по x имеют дивергентный вид и содержат матрицы с переменными коэффициентами. Подобные возмущения много лет используются на практике при построении сеточных методов решения квазилинейной системы уравнений газовой динамики.

Формулируются результаты о слабых и сильных решениях исходной системы и систем с возмущениями, в том числе равномерные по τ оценки слабых решений последних систем. Они дополняют известные результаты.

Для разностей $\mathbf{r}_\tau$ решений исходной системы и систем с возмущениями выводятся оценки порядка $O(\tau^{\alpha/2})$, $0 < \alpha \leqslant 2$, в том числе в норме $C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))$, при начальных данных $\mathbf{w}_0$ и свободном члене $\mathbf{f}$ из соответствующих пространств Соболева и Никольского гладкости порядка α по x (для $\mathbf{f}$ также порядка $\alpha/2$ по t для гиперболического возмущения). При $\alpha = 1/2$ охватывается широкий класс разрывных функций $\mathbf{w}_0$, что существенно для приложений. Приводятся также оценки производных любого порядка по x для решений всех рассматриваемых систем и разностей $\mathbf{r}_\tau$ порядка $O(\tau^{\alpha/2})$, $0 < \alpha \leqslant 2$ при постоянных по x коэффициентах систем. Описывается приложение результатов к линеаризованным на постоянном решении системе уравнений газовой динамики и ее возмущениям – параболической и гиперболической 2-го порядка квазигазодинамическим (КГД) системам уравнений:

1. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
2. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
3. Четверушкин Б.Н. Гиперболическая квазигазодинамическая система // Матем. моделирование. 2018. Т. 30. № 2. С. 81–98.

Параболическое возмущение можно рассматривать как вариант хорошо известного метода искусственной вязкости.
Гиперболическое возмущение в разных постановках изучалось в основном для исходного гиперболического уравнения, а не системы, 1-го порядка, но включая квазилинейный случай, в том числе в:

Д.Д. Коул, *Методы возмущений в прикладной математике*, Мир, Москва, 1972.
G. Genet, M. Madaune, "Singular perturbations for a class of nonlinear hyperbolic-hyperbolic problems", *J. Math. Anal. Appl.*, **64** (1978), 1–24.
Л.Р. Волевич, М.Г Джавадов, "Равномерные оценки решений гиперболических уравнений с малым параметром при старших производных", *Дифф. уравнения*, **19**:12 (1983), 2082–2090.
A. Van Harten, R.R. Van Hassel, "A quasi-linear, singular perturbation problem of hyperbolic type", *SIAM J. Math. Anal.*, **16**:6 (1985), 1258–1267.
S. Schochet, "Hyperbolic-hyperbolic singular limits", *Commun. Part. Diff. Equat.*, **12**:6 (1987), 589–632.
H. Fattorini, "The hyperbolic singular perturbation problem: an operator theoretic approach", *J. Diff. Equat.*, **70** (1987), 1–41.
E.M. De Jager, J. Furu, *The theory of singular perturbations*, Elsevier, Amsterdam, 1996.

Введем гильбертовы пространство Лебега $L^2(\mathbb{R}^n) = H^0(\mathbb{R}^n)$ и Соболева $H^1(\mathbb{R}^n)$, $H^2(\mathbb{R}^n)$ (все пространства считаем вещественными) со скалярн. произведениями $(u,v)_{H^l(\mathbb{R}^n)} = \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant l} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla^k v \cdot \nabla^k w\, dx$, $l = 0,1,2$.

Здесь $\nabla = (\partial_1, \dots \partial_n)$, а $\nabla^2 = \{\partial_i \partial_j\}_{i,j=1}^n$ – матрица 2-х производных по x, $n \geqslant 1$, и символ $\cdot$ обозначает скалярное произведение векторов или матриц (если не указано иное).

Пусть $\Pi_T := \mathbb{R}^n \times (0,T)$ – слой, и $H^1(\Pi_T)$ – пространство Соболева. Через $L^{2,q}(\Pi_T)$ и $W_{2,q}^{l,0}(\Pi_T)$, $W_{2,q}^{l,1}(\Pi_T)$ с $1 \leqslant q \leqslant \infty$, $l = 1,2$ обозначим анизотропные пространства Лебега и Соболева с нормами

$$\|v\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} = \big\| \|v(x,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \big\|_{L^q(0,T)},$$

$$\|v\|_{W_{2,q}^{1,0}(\Pi_T)} = \|\{v, \nabla v\}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} \equiv \|v\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} + \|\nabla v\|_{L^{2,q}(\Pi_T)},$$

$$\|v\|_{W_{2,q}^{2,0}(\Pi_T)} = \|\{v, \nabla v, \nabla^2 v\}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)}, \quad \|v\|_{W_{2,q}^{l,1}(\Pi_T)} = \|v\|_{W_{2,q}^{l,0}(\Pi_T)} + \|\partial_t v\|_{L^{2,q}(\Pi_T)}.$$

Пусть $V_2(\Pi_T)$ – известное пространство функций $v \in L^{2,\infty}(\Pi_T)$ с $\nabla v \in L^2(\Pi_T)$, а $C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))$ состоит из непрерывных функций v: $[0,T] \to L^2(\mathbb{R}^n)$ и $\|v\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant T} \|v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Введем произведения

$$(\mathbf{v},\mathbf{w})_{\mathbb{R}^n}=\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\,dx,\quad (\mathbf{v},\mathbf{w})_{\Pi_T}=\int_{\Pi_T}\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\,dxdt$$

для вектор-функций $\mathbf{v},\mathbf{w}$ таких, что $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\in L^1(\mathbb{R}^n)$ или $L^1(\Pi_T)$ соответственно.

Все векторы и вектор-функции считаем столбцами, операторы ∇^l, ∂_t^l, $l=1,2$ применяются к вектор- и матрицам-функциям поэлементно.

Если не указано противное, то лебеговы нормы вектор-функций $\mathbf{v}$, $\nabla\mathbf{v}$ и квадратных матриц-функций A вводятся как нормы в этих пространствах от евклидовых норм $|\mathbf{v}|$, $(|\partial_1\mathbf{v}|^2+\ldots+|\partial_n\mathbf{v}|^2)^{1/2}$ и спектральной нормы $\|A\|$.

Далее, лебеговы нормы $\nabla^2\mathbf{v}$ и ∇A, $\nabla^2 A$ понимаются как суммы норм соответствующих частных производных $\mathbf{v}$ и A. Подобное относится и к составным прямоугольным матрицам-функциям и их производным.

Введем задачу Коши $\mathscr{H}_1$ для симметричной гиперболической системы 1-го порядка

$$\mathscr{H}\mathbf{w} := \partial_t \mathbf{w} + B_i \partial_i \mathbf{w} + C\mathbf{w} = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad \Pi_T, \quad \mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{w}_0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{w}(x,t)$ и $\mathbf{f}(x,t)$: $\Pi_T \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{w}_0(x)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – искомая и заданные вектор-функции, а $B_i(x,t) = B_i^T(x,t)$, $i = \overline{1,n}$, $C(x,t)$ – коэффициенты-матрицы-функции порядка m. Предполагается суммирование по повторяющимся индексам $i,j = \overline{1,n}$.
Пусть выполнены условия на данные

$$\mathbf{B}, \operatorname{div}\mathbf{B}, C \in L^\infty(\Pi_T), \quad \mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T), \quad \mathbf{w}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n), \tag{2}$$

где $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_n)$ – составная матрица старших коэффициентов размеров $m \times mn$ и $\operatorname{div}\mathbf{B} := \partial_i B_i$. Здесь и ниже принадлежность матриц- и вектор-функций какому-либо пространству означает, что всех их элементы принадлежат этому пространству.
Для упрощения условия на коэффициенты и их производные формулируются в основном в терминах пространств $L^\infty(\Pi_T)$.

Слабым решением задачи Коши $\mathscr{H}_1$ назовем функцию $\mathbf{w} \in L^{2,\infty}(\Pi_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$(\mathbf{w}, \mathscr{H}^*\boldsymbol{\varphi})_{\Pi_T} = \ell(\mathbf{w}_0, \mathbf{f}; \boldsymbol{\varphi}) := (\mathbf{w}_0, \boldsymbol{\varphi}_0)_{\mathbb{R}^n} + (\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi})_{\Pi_T} \ \forall \boldsymbol{\varphi} \in W^{1,1}_{2,1}(\Pi_T), \boldsymbol{\varphi}|_{t=T} = 0.$$

Здесь и ниже $\mathscr{H}^*\boldsymbol{\varphi} = -\partial_t\boldsymbol{\varphi} - B_i\partial_i\boldsymbol{\varphi} - (\operatorname{div}\mathbf{B} - C^T)\boldsymbol{\varphi}$ – сопряженный по Лагранжу к $\mathscr{H}$ оператор, а $\boldsymbol{\varphi}(x,t)$: $\Pi_T \to \mathbb{R}^m$ и $\boldsymbol{\varphi}_0 := \boldsymbol{\varphi}|_{t=0}$.

Сильным решением этой задачи Коши назовем функцию $\mathbf{w} \in L^{2,\infty}(\Pi_T)$, имеющую $\nabla\mathbf{w} \in L^{2,\infty}(\Pi_T)$, $\partial_t\mathbf{w} \in L^{2,1}(\Pi_T)$ и удовлетворяющую уравнению в $\mathscr{H}_1$ в $L^{2,1}(\Pi_T)$ и начальному условию $\mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{w}_0$ в $C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))$.

Ниже используются условия типа $\|\mathbf{B}\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leqslant N$, где $N \geqslant 1$ – параметр, и для краткости в них всегда автоматически подразумевается, что $\mathbf{B} \in L^\infty(\Pi_T)$. Возникают постоянные $C(N,T) \geqslant 0$, $C_1(N,T) \geqslant 0$, ..., неубывающие по N, T, причем разные постоянные могут обозначаться одинаково. Пусть I_m – единичная матрица порядка m.

Theorem 1 (свойства решения задачи Коши $\mathscr{H}_1$)

1. а) Пусть выполнены условия (2) *и* $0.5\operatorname{div}\mathbf{B}-C\leqslant c_0 I_m$ *почти всюду (п.в.) в* Π_T *с постоянной* $c_0\geqslant 0$ *(например,* $c_0=\|0.5\operatorname{div}\mathbf{B}-C\|_{L^\infty(\Pi_T)}$*). Тогда существует слабое решение* $\mathbf{w}$ *задачи Коши* $\mathscr{H}_1$ *и для него верна оценка*

$$\|\mathbf{w}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)}\leqslant e^{c_0T}\left(\|\mathbf{w}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}+2\|\mathbf{f}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)}\right).$$

б) Более того, если $\nabla\mathbf{B}\in L^\infty(\Pi_T)$, $\lim_{\xi\to 0}\int_0^T\|\Delta_\xi C\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\,dt=0$, *где* $\Delta_\xi C(x,t):=C(x+\xi,t)-C(x,t)$, *то слабое решение единственно. Оно также обладает свойством* $\mathbf{w}\in C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))$ *и поэтому в указанной оценке* $\|\mathbf{w}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)}=\|\mathbf{w}\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))}$.

2. Пусть $\|\{\mathbf{B},C,\nabla\mathbf{B},\nabla C\}\|_{L^\infty(\Pi_T)}\leqslant N$ *и* $\mathbf{f},\nabla\mathbf{f}\in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{w}_0\in H^1(\mathbb{R}^n)$. *Тогда слабое решение* $\mathbf{w}$ *является сильным решением* $\mathbf{w}$, *оно единственно и для него верна оценка*

$$\|\nabla\mathbf{w}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)}+\|\partial_t\mathbf{w}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)}\leqslant C_1(N,T)\left(\|\mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}+\|\mathbf{f}\|_{W^{1,0}_{2,1}(\Pi_T)}\right).$$

Theorem 1 (свойства решения задачи Коши $\mathscr{H}_1$, регулярность)

Если также $\mathbf{f} \in L^{2,q}(\Pi_T)$ *при некотором* $1 \leqslant q \leqslant \infty$, *то* $\partial_t \mathbf{w} \in L^{2,q}(\Pi_T)$ *и*

$$\|\partial_t \mathbf{w}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} \leqslant C_2(N,T)\big(\|\mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} + \|\nabla \mathbf{f}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)}\big).$$

3. а) Пусть дополнительно $\|\{\nabla^2 \mathbf{B}, \nabla^2 C\}\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leqslant N$ *и* $\nabla^2 \mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{w}_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$. *Тогда для сильного решения* $\mathbf{w}$ *существуют* $\nabla^2 \mathbf{w} \in L^{2,\infty}(\Pi_T)$, $\partial_t \nabla \mathbf{w} \in L^{2,1}(\Pi_T)$ *и*

$$\|\nabla^2 \mathbf{w}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} + \|\partial_t \nabla \mathbf{w}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} \leqslant C_3(N,T)\big(\|\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W^{2,0}_{2,1}(\Pi_T)}\big).$$

б) Если также $\|\{\partial_t \mathbf{B}, \partial_t C\}\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leqslant N$ *и* $\mathbf{f}, \nabla \mathbf{f}, \partial_t \mathbf{f} \in L^{2,q}(\Pi_T)$ *при некотором* $1 \leqslant q \leqslant \infty$, *то дополнительно существует* $\partial_t^2 \mathbf{w} \in L^{2,q}(\Pi_T)$ *и*

$$\|\partial_t^2 \mathbf{w}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} \leqslant C_4(N,T)\big(\|\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W^{2,0}_{2,1}(\Pi_T)} + \|\{\mathbf{f}, \nabla \mathbf{f}, \partial_t \mathbf{f}\}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)}\big).$$

Введем теперь задачу Коши для параболической системы уравнений 2-го порядка – возмущения системы в задаче $\mathscr{H}_1$ с малым параметром $0<\tau\leqslant\bar\tau$ при вторых производных по x:

$$\mathscr{P}_\tau\mathbf{y}:=\mathscr{H}\mathbf{y}-\tau\partial_i(A_{ij}\partial_j\mathbf{y})=\mathbf{f}_\tau+\tau\partial_i\mathbf{g}_{i\tau}\ \text{ в }\ \Pi_T,\ \ \mathbf{y}|_{t=0}=\mathbf{y}_{0\tau}\ \text{ в }\ \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{y}(x,t)$ и $\mathbf{f}_\tau(x,t),\mathbf{g}_{i\tau}(x,t)$: $\Pi_T\to\mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}_{0\tau}(x)$: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ – искомая и заданные вектор-функции,
$A_{ij}\in L^\infty(\Pi_T)$ – коэффициенты-матрицы-функции порядка m, $i,j=\overline{1,n}$.
Следуя О.А. Ладыженской, будем предполагать выполнение условия

$$\nu\|\nabla\mathbf{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}-\mu\|\mathbf{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leqslant(A_{ij}\partial_j\mathbf{v},\partial_i\mathbf{v})_{\mathbb{R}^n}\ \forall\mathbf{v}\in H^1(\mathbb{R}^n)\ \text{п.в. в }(0,T) \quad (4)$$

с некоторыми постоянными $\nu>0$ и $\mu\geqslant0$.
Оно шире, чем алгебраическое условие $\nu|\mathbf{w}|^2\leqslant(A(x,t)\mathbf{w})\cdot\mathbf{w}$ для всех $\mathbf{w}\in\mathbb{R}^{nm}$ п.в. в Π_T с блочной матрицей $A:=\{A_{ij}\}_{i,j=1}^n$.
Пусть выполнены условия на данные

$$B_i,C,A_{ij}\in L^\infty(\Pi_T),\ i,j=\overline{1,n},\ \ \mathbf{f}_\tau\in L^{2,1}(\Pi_T),\ \ \mathbf{y}_{0\tau}\in L^2(\mathbb{R}^n) \quad (5)$$

и $\mathbf{g}_\tau:=(\mathbf{g}_{1\tau},\dots,\mathbf{g}_{n\tau})\in L^2(\Pi_T)$.

Слабым решением задачи Коши $\mathscr{P}_\tau$ назовем функцию $\mathbf{y} \in V_2(\Pi_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$-(\mathbf{y}, \partial_t \boldsymbol{\varphi})_{\Pi_T} + (B_i \partial_i \mathbf{y} + C\mathbf{y}, \boldsymbol{\varphi})_{\Pi_T} + \tau (A_{ij} \partial_j \mathbf{y}, \partial_i \boldsymbol{\varphi})_{\Pi_T} = \\ = \ell(\mathbf{y}_{0\tau}, \mathbf{f}_\tau; \boldsymbol{\varphi}) - \tau (\mathbf{g}_{i\tau}, \partial_i \boldsymbol{\varphi})_{\Pi_T}$$

для любой $\boldsymbol{\varphi} \in H^1(\Pi_T)$, $\boldsymbol{\varphi}|_{t=T} = 0$. Положим $\bar{c}_0 = c_0 + \bar{\tau}\mu$.

Theorem 2 (свойства решения задачи Коши $\mathscr{P}_\tau$)

Пусть выполнены условия (4), (5), $\operatorname{div} \mathbf{B} \in L^\infty(\Pi_T)$, $0.5 \operatorname{div} \mathbf{B} - C \leqslant c_0 I_m$ *п.в. в* Π_T *и* $\mathbf{g}_\tau \in L^2(\Pi_T)$.
Тогда существует единственное слабое решение $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\tau$ *задачи Коши* $\mathscr{P}_\tau$, *причем* $\mathbf{y}_\tau \in C(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))$ *и верна его энергетическая оценка*

$$\max \left\{ \|\mathbf{y}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))}, \sqrt{\nu\tau} \|\nabla \mathbf{y}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \right\} \leqslant \\ \leqslant e^{\bar{c}_0 T} \left(\|\mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\|\mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} + \sqrt{\nu^{-1}\tau} \|\mathbf{g}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \right).$$

Введем также задачу Коши для гиперболической системы уравнений 2-го порядка – возмущения исходной системы в задаче $\mathscr{H}_1$ с параметром $0 < \tau \leqslant \bar{\tau}$ при старших производных

$$\mathscr{H}_\tau \mathbf{y} := \tau \partial_t^2 \mathbf{y} + \mathscr{H} \mathbf{y} - \tau \partial_i (A_{ij} \partial_j \mathbf{y}) = \mathbf{f}_\tau \quad \text{в} \quad \Pi_T, \tag{6}$$

$$\mathbf{y}|_{t=0} = \mathbf{y}_{0\tau}, \quad \partial_t \mathbf{y}|_{t=0} = \mathbf{y}_{1\tau} \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

где $\mathbf{y}(x,t)$ и $\mathbf{f}_\tau(x,t)$: $\Pi_T \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}_{0\tau}(x), \mathbf{y}_{1\tau}(x)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ – искомая и заданные функции.

Пусть выполнены условия на данные (5) и $\mathbf{y}_{1\tau} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. *Слабым решением* задачи Коши $\mathscr{H}_{2\tau}$ назовем функцию $\mathbf{y} \in W^{1,1}_{2,\infty}(\Pi_T)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$-\tau(\partial_t \mathbf{y}, \partial_t \boldsymbol{\varphi})_{\Pi_T} + (\mathscr{H} \mathbf{y}, \boldsymbol{\varphi})_{\Pi_T} + \tau(A_{ij} \partial_j \mathbf{y}, \partial_i \boldsymbol{\varphi})_{\Pi_T} = \ell(\mathbf{y}_{1\tau}, \mathbf{f}_\tau; \boldsymbol{\varphi})$$

для любой $\boldsymbol{\varphi} \in W^{1,1}_{2,1}(\Pi_T)$, $\boldsymbol{\varphi}|_{t=T} = 0$ и начальному условию $\mathbf{y}|_{t=0} = \mathbf{y}_{0\tau}$ в $C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))$.

Для этой задачи Коши потребуется следующее условие преобладания матрицы A старших коэффициентов системы 2-го порядка над матрицей $\mathbf{B}$ старших коэффициентов системы 1-го порядка

$$\|\mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\leqslant(1-\delta)^2\left[(A_{ij}\partial_j\mathbf{v},\partial_i\mathbf{v})_{\mathbb{R}^n}+\mu_1\|\mathbf{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right]\quad\forall\mathbf{v}\in H^1(\mathbb{R}^n)\quad(8)$$

с некоторыми $0\leqslant\delta<1$, $\mu_1\geqslant 0$, где $\mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{v}:=B_i\partial_i\mathbf{v}$.
Оно шире, чем более простое алгебраическое условие

$$|\mathbf{B}(x,t)\cdot\mathbf{w}|^2\leqslant(1-\delta)^2(A_{ij}(x,t)\mathbf{w}_j)\cdot\mathbf{w}_i\quad\forall\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_n\in\mathbb{R}^m\text{ п.в. в }\Pi_T,$$

с тем же δ и $\mathbf{B}\cdot\mathbf{w}:=B_i\mathbf{w}_i$. Подобные условия известны в литературе.

Введем также условие $A\leqslant c_AI_{nm}$ п.в. в Π_T, т.е.

$$(A(x,t)\mathbf{w})\cdot\mathbf{w}\leqslant c_A|\mathbf{w}|^2\quad\forall\mathbf{w}\in\mathbb{R}^{mn}\quad\text{п.в. в}\quad\Pi_T\qquad(9)$$

с некоторым $c_A>0$, например, $c_A=n\|A\|_{L^\infty(\Pi_T)}$, где
$\|A\|_{L^\infty(\Pi_T)}:=\max_{i,j=\overline{1,n}}\|A_{ij}\|_{L^\infty(\Pi_T)}$.

Theorem 3 (свойства решения задачи Коши $\mathscr{H}_{2\tau}$)

Пусть выполнены условия (4), (5), (8), (9) *и* $\operatorname{div}\mathbf{B}, \partial_t A_{ij} \in L^\infty(\Pi_T)$, $A_{ij} = A_{ji}^T$, $i,j = \overline{1,n}$, $0.5\operatorname{div}\mathbf{B} - C \geqslant c_0 I_m$ *п.в. в* Π_T, $\mathbf{y}_{0\tau} \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{y}_{1\tau} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *и* $8\bar{\tau}^2\mu \leqslant 1$. *Тогда существует единственное слабое решение* $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\tau$ *задачи Коши* $\mathscr{H}_{2\tau}$ *и верна оценка*

$$\nu_0 \max\left\{\|\mathbf{y}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))}, \tau\|\{\nabla\mathbf{y}_\tau, \partial_t\mathbf{y}_\tau\}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)}, \sqrt{\delta\tau}\|\{\partial_t\mathbf{y}_\tau, \nabla\mathbf{y}_\tau\}\|_{L^2(\Pi_T)}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant e^{\bar{c}_1 T}\left(\|\mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \tau\sqrt{2c_A}\|\nabla\mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\tau\|\mathbf{y}_{1\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 9\|\mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)}\right),$$

где $\nu_0 = \min\{\sqrt{\nu/2}, \sqrt{1/6}\}$,
$\bar{c}_1 = \max\left\{4\left[c_0 + \bar{\tau}(\delta\mu + (1-\delta)\mu_1) + \sqrt{3/2}\|C\|_{L^\infty(\Pi_T)}\right], (2\nu)^{-1}c_{A1}\right\}$,
а $c_{A1} \geqslant 0$ *таково, что* $\partial_t A \leqslant c_{A1} I_{nm}$ *п.в. в* Π_T *(например,* $c_{A1} = n\|\partial_t A\|_{L^\infty(\Pi_T)}$, *ср. с* (9)*).*

Выведем оценки разности решений задач Коши для системы уравнений 1-го порядка и ее возмущений.
Положим $\mathscr{H}^1 = H^1(\mathbb{R}^n)$ и введем банаховы пространства данных, построенные с помощью $K_{\alpha,\infty}$-метода вещественной интерполяции банаховых пространств, $0 < \alpha < 1$, см., например:
Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980
для начальных данных

$$\mathscr{H}^{\alpha} := \left(L^2(\mathbb{R}^n), H^1(\mathbb{R}^n)\right)_{\alpha,\infty},$$
$$\mathscr{H}^{1+\alpha} := \left(H^1(\mathbb{R}^n), H^2(\mathbb{R}^n)\right)_{\alpha,\infty},$$

для свободного члена в случае параболического возмущения

$$\mathscr{W}_{2,1}^{\alpha,0} := \left(L^{2,1}(\Pi_T), W_{2,1}^{1,0}(\Pi_T)\right)_{\alpha,\infty},$$
$$\mathscr{W}_{2,1}^{1+\alpha,0} := \left(W_{2,1}^{1,0}(\Pi_T), W_{2,1}^{2,0}(\Pi_T)\right)_{\alpha,\infty},$$

а также для свободного члена в случае гиперболического возмущения

$$\mathscr{W}_{2,1}^{2\alpha,\alpha} := \left(L^{2,1}(\Pi_T), W_{2,1}^{2,1}(\Pi_T)\right)_{\alpha,\infty}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

Theorem 4 (оценки разности решений задач Коши $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{P}_\tau$)

1. Пусть выполнены условия теоремы 1, пп. 1, 2 с $q=1$ и теоремы 2 и $\|A\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leqslant N$.
Для разности $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{w} - \mathbf{y}_\tau$ решений задач Коши $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{P}_\tau$ верна оценка

$$\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau}\|\nabla \mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \leqslant C(N,T)\big[\|\mathbf{w}_0 - \mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} +$$
$$+ \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} + \sqrt{\tau}\big(\|\mathbf{g}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} + \|\mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W^{1,0}_{2,1}(\Pi_T)}\big)\big].$$

Здесь и ниже $C(N,T)$ не зависит от τ.

Theorem 4 (оценки разности решений задач Коши $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{P}_\tau$, продолжение)

В частности, при $\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}$, $\mathbf{g}_\tau = 0$, $\mathbf{y}_{0\tau} = \mathbf{w}_0$ *имеем*

$$\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau}\|\nabla\mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \leqslant C(N,T)\sqrt{\tau}\big(\|\mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W^{1,0}_{2,1}(\Pi_T)}\big),$$

$$\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} \leqslant C(N,T)\tau^{\alpha/2}\big(\|\mathbf{w}_0\|_{\mathscr{H}^\alpha} + \|\mathbf{f}\|_{\mathscr{W}^{\alpha,0}_{2,1}}\big), \quad 0 < \alpha < 1. \tag{10}$$

2. Пусть выполнены также условия теоремы 1, п. 3а,
$\|\operatorname{div} A_{\cdot j}\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leqslant N$, $j = \overline{1,n}$ *для* $\operatorname{div} A_{\cdot j} := \partial_i A_{ij}$
и снова $\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}$, $\mathbf{g}_\tau = 0$, $\mathbf{y}_{0\tau} = \mathbf{w}_0$. *Для* $\mathbf{r}_\tau$ *верны также оценки*

$$\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau}\|\nabla\mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \leqslant C(N,T)\tau\big(\|\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W^{2,0}_{2,1}(\Pi_T)}\big),$$

$$\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau}\|\nabla\mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \leqslant C(N,T)\tau^{\alpha/2}\big(\|\mathbf{w}_0\|_{\mathscr{H}^\alpha} + \|\mathbf{f}\|_{\mathscr{W}^{\alpha,0}_{2,1}}\big)$$

при $1 < \alpha < 2$.

Введем простейшее усреднение по Стеклову

$$(\bar{\sigma}^{(\tau)}v)(x) := \frac{1}{\tau^n}\int_{(-\tau/2,\tau/2)^n} v(x+\xi)\,d\xi$$

по x с шагом $\tau > 0$. Напомним интерполяционные пространства $\mathscr{W}_{2,1}^{2\alpha,\alpha} := \left(L^{2,1}(\Pi_T), W_{2,1}^{2,1}(\Pi_T)\right)_{\alpha,\infty}$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

Theorem 5 (оценки разности решений задач Коши $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_{2\tau}$)

Пусть выполнены все условия теоремы 1 с $q = 1$ и теоремы 3, а также $\|A\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leqslant N$, $\|\operatorname{div} A_{\cdot j}\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leqslant N$, $j = \overline{1,n}$. Для разности $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{w} - \mathbf{y}_\tau$ решений задач Коши $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_{2\tau}$ верна оценка

$$\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \tau\|\{\nabla\mathbf{r}_\tau, \partial_t\mathbf{r}_\tau\}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} + \sqrt{\delta\tau}\|\{\nabla\mathbf{r}_\tau, \partial_t\mathbf{r}_\tau\}\|_{L^2(\Pi_T)} \leqslant$$

$$\leqslant C(N,T)\big[\|\mathbf{w}_0 - \mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} +$$

$$+\tau\big(\|\nabla\mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{y}_{1\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{2,1}(\Pi_T)}\big)\big].$$

Theorem 5 (оценки разности решений задач Коши $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_{2\tau}$, продолжение)

При $\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}$, $\mathbf{y}_{1\tau} = 0$, *а также* $\mathbf{y}_{0\tau} = \mathbf{w}_0$ *либо* $\mathbf{y}_{0\tau} = \bar{\sigma}^{(\tau)}\mathbf{w}_0$ *верны соответственно оценки*

$$\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \tau\|\{\nabla\mathbf{r}_\tau, \partial_t\mathbf{r}_\tau\}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} + \sqrt{\delta\tau}\|\{\nabla\mathbf{r}_\tau, \partial_t\mathbf{r}_\tau\}\|_{L^2(\Pi_T)} \leqslant$$
$$\leqslant C_2(N,T)\tau\big(\|\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{2,1}(\Pi_T)}\big), \tag{11}$$

$$\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} \leqslant C(N,T)\tau^{\alpha/2}\big(\|\mathbf{w}_0\|_{\mathscr{H}^\alpha} + \|\mathbf{f}\|_{\mathscr{W}_{2,1}^{\alpha,\alpha/2}}\big), \quad 0 < \alpha \leqslant 2. \tag{12}$$

Оценки теоремы 5 родственны полученным в иных условиях и другим методом в статье: Fattorini H. // J. Diff. Equat. 1987. V. 70. P. 1–41.

Слагаемое с множителем τ слева небесполезно. Так, в случае $n = 1$ из оценки (11) в силу неравенства $\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant c\|v\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2}\|v\|_{H^1(\mathbb{R})}^{1/2}$ и свойства $\mathbf{w}, \mathbf{y}_\tau \in C(\bar{\Pi}_T)$ следует оценка в равномерной норме

$$\|\mathbf{r}_\tau\|_{C_b(\bar{\Pi}_T)} := \sup_{\bar{\Pi}_T}|\mathbf{r}_\tau(x,t)| \leqslant C(N,T)(1+\sqrt{\bar{\tau}})\sqrt{\tau}\big(\|\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W_{2,1}^{2,1}(\Pi_T)}\big).$$

Пространство $\mathscr{H}^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с пространством Никольского $H_2^{\alpha}(\mathbb{R}^n)$ при $0<\alpha<2$, $\alpha\neq 1$ (с точностью до эквивалентности норм), Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980, Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.

Верны вложения пространств Никольского и Соболева-Никольского в интерполяционные

$$H_{2,1}^{\alpha,0}(\Pi_T)\subset \mathscr{W}_{2,1}^{\alpha,0},$$

$$H_{2,1}^{\alpha,\alpha/2}(\Pi_T)\subset \mathscr{W}_{2,1}^{\alpha,\alpha/2},\quad 0<\alpha<2,\quad \alpha\neq 1,$$

$$WH_{2,1}^{1,1/2}(\Pi_T):=\{v\in H_{2,1}^{0,1/2}(\Pi_T),\nabla v\in L^{2,1}(\Pi_T)\}\subset \mathscr{W}_{2,1}^{1,1/2}\quad (\text{случай}\quad \alpha=1).$$

А также

$$BV(\mathbb{R}^n)\cap L^{\infty}(\mathbb{R}^n)\subset H_2^{1/2}(\mathbb{R}^n),$$

где $BV(\mathbb{R}^n)$ – пространство функций ограниченной вариации на $\mathbb{R}^n$. Аналогично, $BV(\Pi_T)\cap L^{\infty}(\Pi_T)\subset H_{2,1}^{1/2,1/4}(\Pi_T)$.

Последние вложения обеспечивают оценку $O(\tau^{1/4})$ в (10) и (12) при $\alpha=1/2$ для широкого класса разрывных функций $\mathbf{w}_0$ и $\mathbf{f}$.

Рассмотрим еще случай, когда матрицы $\mathbf{B}, C, A \in L^\infty(0,T)$ не зависят от x и $-C \leqslant c_0 I_m$ п.в. на $(0,T)$. Это ограничение позволяет уточнить и заметно упростить формулировку результатов (которые вытекают из предыдущих теорем), хотя принципиальным оно не является. Введем производную по Соболеву $\partial^{\mathbf{k}} = \partial_1^{k_1} \dots \partial_n^{k_n}$ по x, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$ – мультииндекс с $k_1 \geqslant 0, \dots, k_n \geqslant 0$, любого порядка $|\mathbf{k}|_1 = k_1 + \dots + k_n$.

Theorem 6 (регулярность решений задачи Коши $\mathscr{H}_1$)

Пусть $\mathbf{k}$ *с* $|\mathbf{k}|_1 \geqslant 1$ *и* $1 \leqslant q \leqslant \infty$ *любые.*
1. а) Пусть $\mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{w}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
Тогда для слабого решения $\mathbf{w}$ *задачи Коши* $\mathscr{H}_1$ *верна оценка*

$$\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} \leqslant e^{c_0 T} \left(\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2 \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} \right). \tag{13}$$

Подробнее говоря, оценка (13) *означает, что если* $\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T)$, *то существует* $\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w} \in L^{2,\infty}(\Pi_T)$ *и верна указанная оценка. Для краткости формулировок все оценки в данной теореме и теоремах 7, 8 ниже понимаются аналогичным образом.*

Theorem 6 (регулярность решений задачи Коши $\mathscr{H}_1$, продолжение)

б) Пусть $m = 1, 2$. Если $\mathbf{f}, \nabla^m \mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{w}_0 \in H^m(\mathbb{R}^n)$, то для сильного решения $\mathbf{w}$ задачи Коши $\mathscr{H}_1$ верны оценки

$$\|\partial^{\mathbf{k}} \nabla^m \mathbf{w}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} \leqslant c e^{c_0 T} \left(\|\partial^{\mathbf{k}} \nabla^m \mathbf{w}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}} \nabla^m \mathbf{f}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} \right).$$

Если $\|\{\mathbf{B}, C\}\|_{L^\infty(0,T)} \leqslant N$, то при $m = 1, 2$ соответственно верны оценки

$$\|\partial_t \partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} \leqslant c N e^{c_0 T} T^{1/q} \left(\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}\|_{W^{1,0}_{2,1}(\Pi_T)} \right) + \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)},$$

$$\|\partial_t \nabla \partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} \leqslant c N e^{c_0 T} T^{1/q} \left(\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}\|_{W^{2,0}_{2,1}(\Pi_T)} \right) + \|\partial^{\mathbf{k}} \nabla \mathbf{f}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)}.$$

При $m = 2$ и $\|\{\partial_t \mathbf{B}, \partial_t C\}\|_{L^\infty(0,T)} \leqslant N$, $\partial_t \mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T)$ верна также оценка

$$\|\partial_t^2 \partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} \leqslant c N^2 e^{c_0 T} T^{1/q} \left(\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}\|_{W^{2,0}_{2,1}(\Pi_T)} \right)$$
$$+ c N \|\partial^{\mathbf{k}} \{\mathbf{f}, \nabla \mathbf{f}, \partial_t \mathbf{f}\}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)}.$$

Theorem 6 (регулярность решений задачи Коши $\mathscr{P}_\tau$)

2. Пусть выполнены условия (4) *с* $\mu = 0$, *т.е.*

$$\nu \|\nabla \mathbf{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant (A_{ij}\partial_j \mathbf{v}, \partial_i \mathbf{v})_{\mathbb{R}^n} \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{п.в. в } (0,T)$$

с постоянной $\nu > 0$,
$\mathbf{f}_\tau \in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{g}_\tau \in L^2(\Pi_T)$, $\mathbf{y}_{0\tau} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
Тогда для слабого решения $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\tau$ *задачи Коши* $\mathscr{P}_\tau$ *верна оценка*

$$\max\left\{\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{y}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))}, \sqrt{\nu\tau}\|\nabla\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{y}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant e^{c_0 T}\left(\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} + \sqrt{\nu^{-1}\tau}\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{g}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)}\right).$$

Theorem 6 (регулярность решений задачи Коши $\mathscr{H}_{2\tau}$)

3. Пусть выполнено условие (4) *с* $\mu = 0$, (8) *с* $\mu_1 = 0$, (9) *и* $\partial_t A_{ij} \in L^\infty(0,T)$, $A_{ij} = A_{ji}^T$, $i,j = \overline{1,n}$,
а также $\mathbf{f}_\tau \in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{y}_{0\tau} \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{y}_{1\tau} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.
Тогда для слабого решения $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\tau$ *задачи Коши* $\mathscr{H}_{2\tau}$ *верна оценка*

$$\nu_1 \max\Big\{ \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{y}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))},$$
$$\tau \|\partial^{\mathbf{k}} \{\nabla \mathbf{y}_\tau, \partial_t \mathbf{y}_\tau\}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)}, \sqrt{\delta\tau}\, \|\partial^{\mathbf{k}} \{\partial_t \mathbf{y}_\tau, \nabla \mathbf{y}_\tau\}\|_{L^2(\Pi_T)} \Big\} \leqslant$$
$$\leqslant e^{c_1 T} \Big(\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \tau \sqrt{2c_A}\, \|\nabla \partial^{\mathbf{k}} \mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\tau \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{y}_{1\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$+ 2\sqrt{2}\, \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} \Big),$$

где $\nu_1 = \min\{\sqrt{2\nu}, 1/\sqrt{2}\}$, $c_1 = \max\big\{2\big(c_0 + \sqrt{2}\|C\|_{L^\infty(0,T)}\big), (2\nu)^{-1} c_{A1}\big\}$,
а $c_{A1} \geqslant 0$ *прежнее.*

Оценки последней теоремы верны и при $|\mathbf{k}|_1 = 0$, когда $\partial^{\mathbf{k}} v = v$.

Theorem 7 (оценки производных разностей решений задач Коши $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{P}_\tau$)

Пусть выполнены условия теоремы 6, пп. 1, 2, кроме условий на $\partial_t \mathbf{f}$ и $\partial_t \mathbf{B}, \partial_t C$, и $\|A\|_{L^\infty(0,T)} \leqslant N$. Пусть $\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}$, $\mathbf{g}_\tau = 0$, $\mathbf{y}_{0\tau} = \mathbf{w}_0$ и $|\mathbf{k}|_1 \geqslant 0$. Тогда для разности $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{w} - \mathbf{y}_\tau$ решений задач Коши $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{P}_\tau$ верны оценки

$$\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau}\|\nabla \partial^{\mathbf{k}} \mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \leqslant$$
$$\leqslant cNe^{2c_0 T}\sqrt{T\tau}\big(\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}\|_{W^{1,0}_{2,1}(\Pi_T)}\big),$$

$$\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau}\|\nabla \partial^{\mathbf{k}} \mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \leqslant$$
$$\leqslant cNe^{2c_0 T} T\tau\big(\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}\|_{W^{2,0}_{2,1}(\Pi_T)}\big),$$

$$\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} \leqslant cN^\alpha e^{(1+\alpha)c_0 T}(T\tau)^{\alpha/2}\big(\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}_0\|_{\mathscr{H}^\alpha} + \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}\|_{\mathscr{W}^{\alpha,0}_{2,1}}\big), 0 < \alpha < 1,$$

$$\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau}\|\nabla \partial^{\mathbf{k}} \mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \leqslant$$
$$\leqslant cNe^{2c_0 T}(T\tau)^{\alpha/2}\big(\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}_0\|_{\mathscr{H}^\alpha} + \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}\|_{\mathscr{W}^{\alpha,0}_{2,1}}\big),\ 1 < \alpha < 2.$$

Theorem 8 (оценки произв. разностей реш. з-ч Коши $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_{2\tau}$)

Пусть выполнены все условия теоремы 6, п. 1 с $q=1$ и п. 3, а также $\|A\|_{L^\infty(0,T)} \leqslant N$. Пусть $\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}$, $\mathbf{y}_{1\tau} = 0$ и $|\mathbf{k}|_1 \geqslant 0$.
Тогда для разности $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{w} - \mathbf{y}_\tau$ решений задач Коши $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_{2\tau}$ при $\mathbf{y}_{0\tau} = \mathbf{w}_0$ либо $\mathbf{y}_{0\tau} = \bar{\sigma}^{(\tau)}\mathbf{w}_0$ верны соответственно оценки

$$\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \tau\|\{\nabla\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau, \partial_t\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} +$$
$$+\sqrt{\delta\tau}\|\{\nabla\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau, \partial_t\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\}\|_{L^2(\Pi_T)} \leqslant$$
$$\leqslant cN^2 e^{(c_0+c_1)T}(T+1)\tau\big(\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}\|_{W^{2,1}_{2,1}(\Pi_T)}\big),$$

$$\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} \leqslant$$
$$\leqslant cN^\alpha e^{(\alpha c_0/2+c_1)T}[(T+1)\tau]^{\alpha/2}\big(\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w}_0\|_{\mathscr{H}^\alpha} + \|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}\|_{\mathscr{W}^{\alpha,\alpha/2}_{2,1}}\big), \quad 0<\alpha\leqslant 2.$$

Каждую из оценок в теоремах 6–8 можно просуммировать по всем $\mathbf{k}$ с $|\mathbf{k}|_1 = p$, что приводит к оценкам с заменой $\partial^{\mathbf{k}}$ на ∇^p с любым $p \geqslant 1$. В частности, из таких оценок $\mathbf{r}_\tau$ при $p > n/2$ в силу теоремы вложения следуют оценки в равномерной норме $\sup_{\bar{\Pi}_T}|\mathbf{r}_\tau(x,t)|$.

Линеаризованные на постоянном решении КГД системы дифференциальных уравнений имеют $\ell+1$-й порядок по t и 2–й порядок по x и постоянные коэффициенты, где $\ell=0$ для параболической и $\ell=1$ для гиперболической КГД систем.
В симметризованной матричной форме для нормированного (безразмерного) вектора малых возмущений $\tilde{\mathbf{z}}(x,t) := (\tilde{\rho},\tilde{\mathbf{u}},\tilde{\varepsilon})(x,t)$ плотности, скорости и удельной внутренней энергии газа, где $\tilde{\mathbf{u}}=(\tilde{u}_1,\dots,\tilde{u}_n)$, $n=1,2,3$, задача Коши для них примет вид

$$\ell\tau\partial_t^2\tilde{\mathbf{z}}+\partial_t\tilde{\mathbf{z}}+c_*B^{(i)}\partial_i\tilde{\mathbf{z}}-\tau c_*^2A^{(ij)}\partial_i\partial_j\tilde{\mathbf{z}}=\mathbf{f}_\tau \quad \text{в} \quad \Pi_T, \tag{14}$$

$$\tilde{\mathbf{z}}|_{t=0}=\tilde{\mathbf{z}}_{0\tau}, \quad \partial_t\tilde{\mathbf{z}}|_{t=0}=\tilde{\mathbf{z}}_{1\tau} \quad (\text{при} \quad \ell=1) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n, \tag{15}$$

где $B^{(i)}$ и $A^{(ij)}$ – постоянные симметричные матрицы конвективных и вязких слагаемых порядка $m=n+2$, $A^{(ij)}=A^{(ji)}$, $c_*>0$ – фоновая скорость звука, $\tau>0$ – параметр релаксации.
Свободный член $\mathbf{f}_\tau$ дописан формально для общности анализа.
При $\tau=0$ эта задача переходит в задачу Коши для линеаризованной на пост. решении системы уравнений газовой динамики 1-го порядка

$$\partial_t\mathbf{w}+c_*B^{(i)}\partial_i\mathbf{w}=\mathbf{f} \quad \text{в} \quad \Pi_T, \quad \mathbf{w}|_{t=0}=\mathbf{w}_0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n. \tag{16}$$

Для полноты приведем матрицы $B^{(k)}$, $A^{(kk)}$, $A^{(kl)}$ $(k \neq l)$ в 3×3–блочном виде

$$B^{(k)} = \begin{pmatrix} M_k & \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\mathbf{e}_k^T & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\mathbf{e}_k & M_k I_n & \frac{1}{\sqrt{\gamma_*}}\mathbf{e}_k \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma_*}}\mathbf{e}_k^T & M_k \end{pmatrix}.$$

Здесь и ниже $\mathbf{M} = (M_1, \ldots, M_n)$ – нормированная на c_* фоновая скорость и поэтому $M = |\mathbf{M}|$ – фоновое число Маха, $\gamma_* = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$, $\widehat{a}_0 = \frac{1}{3}\widehat{\alpha}_s + \widehat{\alpha}_{1s} \geqslant 0$, причем $\gamma > 1$ – показатель адиабаты в уравнении состояния газа, $\widehat{\alpha}_s \geqslant 0$, $\widehat{\alpha}_{1s} \geqslant 0$, $\widehat{\alpha}_P \geqslant 0$ – постоянные КГД-параметры в искусственных коэффициентах вязкости и теплопроводности.
Также $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ – векторы-столбцы канонического базиса в $\mathbb{R}^n$ и I_n – единичная матрица порядка n,

$$A^{(kk)} = \begin{pmatrix} M_k^2 + \dfrac{1}{\gamma} & \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}} M_k \mathbf{e}_k^T & \dfrac{1}{\sqrt{\gamma\gamma_*}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{\gamma}} M_k \mathbf{e}_k & (M_k^2 + \widehat{\alpha}_s) I_n + (\widehat{a}_0 + 1)\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T & \dfrac{2}{\sqrt{\gamma_*}} M_k \mathbf{e}_k \\ \dfrac{1}{\sqrt{\gamma\gamma_*}} & \dfrac{2}{\sqrt{\gamma_*}} M_k \mathbf{e}_k^T & M_k^2 + \widehat{\alpha}_P + \dfrac{1}{\gamma_*} \end{pmatrix},$$

$$A^{(kl)} =$$

$$= \begin{pmatrix} M_k M_l & \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}(M_k \mathbf{e}_l + M_l \mathbf{e}_k)^T & 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}(M_k \mathbf{e}_l + M_l \mathbf{e}_k) & M_k M_l I_n + \dfrac{1}{2}(\widehat{a}_0 + 1)(\mathbf{e}_k \mathbf{e}_l^T + \mathbf{e}_l \mathbf{e}_k^T) & \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_*}}(M_k \mathbf{e}_l + M_l \mathbf{e}_k) \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{\gamma_*}}(M_k \mathbf{e}_l + M_l \mathbf{e}_k)^T & M_k M_l \end{pmatrix}$$

где $k \neq l$.

Для $\tilde{\mathbf{z}} = (\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\varepsilon}), \mathbf{z} = (\rho, \mathbf{u}, \varepsilon) \in H^1(\mathbb{R}^n)$ введем билинейную форму

$$\mathscr{A}_{\mathbb{R}^n}(\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) = \frac{1}{\gamma}(\nabla\tilde{\rho}, \nabla\rho)_{\mathbb{R}^n} + (\mathbf{M}\nabla\tilde{\rho}, \mathbf{M}\nabla\rho)_{\mathbb{R}^n} + \frac{2}{\sqrt{\gamma}}((\mathbf{M}\nabla)\tilde{\mathbf{u}}, \nabla\rho)_{\mathbb{R}^n} +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\gamma\gamma_*}}(\nabla\tilde{\varepsilon}, \nabla\rho)_{\mathbb{R}^n} + \frac{2}{\sqrt{\gamma}}(\mathbf{M}\nabla\tilde{\rho}, \operatorname{div}\mathbf{u})_{\mathbb{R}^n} + \widehat{\alpha}_s(\nabla\tilde{\mathbf{u}}, \nabla\mathbf{u})_{\mathbb{R}^n} +$$
$$+ (\widehat{a}_0 + 1)(\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}}, \operatorname{div}\mathbf{u})_{\mathbb{R}^n} + ((\mathbf{M}\nabla)\tilde{\mathbf{u}}, (\mathbf{M}\nabla)\mathbf{u})_{\mathbb{R}^n} + \frac{2}{\sqrt{\gamma_*}}(\mathbf{M}\nabla\tilde{\varepsilon}, \operatorname{div}\mathbf{u})_{\mathbb{R}^n} +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\gamma\gamma_*}}(\nabla\tilde{\rho}, \nabla\varepsilon)_{\mathbb{R}^n} + \frac{2}{\sqrt{\gamma_*}}((\mathbf{M}\nabla)\tilde{\mathbf{u}}, \nabla\varepsilon)_{\mathbb{R}^n} + \left(\widehat{\alpha}_P + \frac{1}{\gamma_*}\right)(\nabla\tilde{\varepsilon}, \nabla\varepsilon)_{\mathbb{R}^n} +$$
$$+ (\mathbf{M}\nabla\tilde{\varepsilon}, \mathbf{M}\nabla\varepsilon)_{\mathbb{R}^n}.$$

Здесь $\mathbf{M}\nabla = \mathbf{M} \cdot \nabla$.

Формально эта билинейная форма получается умножением суммы $-A^{(ij)}\partial_i\partial_j\tilde{\mathbf{z}}$ на $\mathbf{z}$, интегрированием по $\mathbb{R}^n$ и интегрированием по частям.

Пусть $\mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{z} = B^{(i)}\partial_i\mathbf{z}$.

Lemma 9 (свойства билинейной формы)

Верны свойства симметричности, преобладания и неотрицательной определенности

$$\mathscr{A}_{\mathbb{R}^n}(\tilde{\mathbf{z}},\mathbf{z}) = \mathscr{A}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{z},\tilde{\mathbf{z}}),$$

$$\|\mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{z}\|^2_{\mathbb{R}^n} \leqslant \mathscr{A}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{z},\mathbf{z}) = \widehat{\alpha}_s\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{\mathbb{R}^n} + \widehat{a}_0\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2_{\mathbb{R}^n} + \widehat{\alpha}_P\|\nabla\varepsilon\|^2_{\mathbb{R}^n} + \|\mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{z}\|^2_{\mathbb{R}^n},$$

$$\delta_1\|\nabla\mathbf{z}\|^2_{\mathbb{R}^n} \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\delta_0\|\nabla\rho\|^2_{\mathbb{R}^n}, \widehat{\alpha}_s\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{\mathbb{R}^n} + \widehat{a}_0\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2_{\mathbb{R}^n} + \widehat{\alpha}_P\|\nabla\varepsilon\|^2_{\mathbb{R}^n}\right\} \leqslant \mathscr{A}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{z},\mathbf{z})$$

для любых $\tilde{\mathbf{z}},\mathbf{z}\in H^1(\mathbb{R}^n)$, *с постоянными* $\delta_0 := \dfrac{1}{3\gamma}\min\left\{1, \dfrac{\widehat{\alpha}_s}{M^2}, \gamma_*\widehat{\alpha}_P\right\}$,

$\delta_1 := \dfrac{1}{2}\min\{\delta_0, \widehat{\alpha}_s, \widehat{\alpha}_P\}$.

В силу леммы 9 все предыдущие теоремы применимы к задачам Коши для линеаризованных системы уравнений газовой динамики (16) и КГД систем (14), (15).

Theorem 10 (применение к линеаризованным ГД и КГД системам)

1. Для задачи Коши для линеаризованной системы уравнений газовой динамики (16) *верны теоремы 1 и 6, п. 1 с* $c_0 = 0$.

2. Пусть $\widehat{\alpha}_s > 0$, $\widehat{\alpha}_P > 0$. *Для задач Коши для линеаризованных КГД систем* (14), (15) *верны свойства* (4) *с* $\nu = c_*^2 \delta_1$, $\mu = 0$ *и* (5) *с* $\delta = \mu_1 = 0$, *и поэтому верны теоремы 2 и 6, п. 2 с* $\bar{c}_0 = c_0 = 0$ *при* $\ell = 0$ *либо теоремы 3 и 6, п. 3 с* $\bar{c}_1 = c_1 = 0$ *при* $\ell = 1$.
Для разности $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{w} - \tilde{\mathbf{z}}$ *решений задач Коши для линеаризованных системы уравнений газовой динамики* (16) *и КГД систем* (14), (15) *верны оценки теорем 4 и 7 с* $c_0 = 0$ *при* $\ell = 0$ *либо теорем 5 и 8 с* $c_0 = c_1 = 0$ *при* $\ell = 1$.

Указанное равенство постоянных c_k, $\bar{c}_k$ нулю важно, т.к. означает ограниченность или степенной (вместо экспоненциального) рост по T постоянных в соответствующих оценках.

Доклад подготовлен при финансовой поддержке РНФ, проект 25-11-00099.

Подробные доказательства можно найти в статье:
А.А. Злотник, Б.Н. Четверушкин. О свойствах и погрешности параболического и гиперболического 2-го порядка возмущений симметричной гиперболической системы 1-го порядка // Математический сборник. 2023. Т. 214. № 4. С. 3–37.