# Теория игр: примеры и приложения

*Зимний лагерь «Экономические Тигрята»*

*6-11 февраля 2023*

# Равновесие Нэша

- Такой набор стратегий игроков, из которого ни одному из участников не выгодно отклоняться в одиночку
- Равновесие Нэша может быть не оптимальным!
- Нэш (1950) доказал, что в любой игре с конечным набором стратегий существует хотя бы одно равновесие, возможно – в смешанных стратегиях

# Теория игр до Нэша

- Курно (1838) нашёл равновесие Нэша (*в 1838 оно, конечно же, так ещё не называлось*) для дуополии: ситуации, когда два производителя конкурируют, одновременно определяя объём выпуска
- В 1928 фон Нейман доказывает существование равновесия в игре с двумя игроками и нулевой суммой
- фон Нейман, Моргенштерн (1944) рассматривает кооперативные игры нескольких игроков

# И после: все Нобелевские премии за теорию игр

- 1994: Нэш, Зельтен, Харсаньи
  - Подыгры, игры с неполной информацией
- 2005: Шеллинг, Ауман
  - Динамические модели, коррелированное равновесие
- 2007: Гурвич, Маскин, Майерсон
  - Дизайн механизмов
- 2012: Рот, Шепли
  - Matching (задача о марьяжах/задача о стабильных браках)
- 2014: Тироль
  - Рыночная власть и регулирование
- 2016: Харт, Хольмстрём
  - Теория контрактов
- 2020: Милгром, Уилсон
  - Аукционы

# Неполная информация

- У игроков нет точной информации о стратегиях и выигрышах других игроков, но есть веры (оценки вероятности)
- Дилемма шерифа:
  - Два игрока: шериф и подозреваемый
  - Подозреваемый может быть как мирным жителем, так и преступником
  - У каждого две стратегии: стрелять и не стрелять

# Дилемма шерифа

Подозреваемый – мирный житель

| Шериф / Подозреваемый | Стрелять | Не стрелять |
|---|---|---|
| **Стрелять** | **-3; -1** | **-1; -2** |
| **Не стрелять** | **-2; -1** | **0; 0** |

# Дилемма шерифа

Подозреваемый – мирный житель

| Шериф / Подозреваемый | Стрелять | Не стрелять |
|---|---|---|
| Стрелять | -3; -1 | -1; -2 |
| Не стрелять | -2; -1 | 0; 0 |

Подозреваемый – преступник

| Шериф / Подозреваемый | Стрелять | Не стрелять |
|---|---|---|
| Стрелять | 0; 0 | 2; -2 |
| Не стрелять | -2; -1 | -1; 1 |

# Дилемма шерифа

Подозреваемый – мирный житель

| Шериф / Подозреваемый | Стрелять | Не стрелять |
|---|---|---|
| Стрелять | -3; -1 | -1; -2 |
| Не стрелять | -2; -1 | 0; 0 |

Подозреваемый – преступник

| Шериф / Подозреваемый | Стрелять | Не стрелять |
|---|---|---|
| Стрелять | 0; 0 | 2; -2 |
| Не стрелять | -2; -1 | -1; 1 |

# Дилемма шерифа

Подозреваемый – мирный житель

| Шериф / Подозреваемый | Стрелять | Не стрелять |
|---|---|---|
| Стрелять | -3; -1 | -1; -2 |
| Не стрелять | -2; -1 | 0; 0 |

Подозреваемый – преступник

| Шериф / Подозреваемый | Стрелять | Не стрелять |
|---|---|---|
| Стрелять | 0; 0 | 2; -2 |
| Не стрелять | -2; -1 | -1; 1 |

# Дилемма шерифа

Подозреваемый – мирный житель

| Шериф / Подозреваемый | Стрелять | Не стрелять |
|---|---|---|
| Стрелять | -3; -1 | -1; -2 |
| Не стрелять | -2; -1 | 0; 0 |

Вероятность p

Подозреваемый – преступник

| Шериф / Подозреваемый | Стрелять | Не стрелять |
|---|---|---|
| Стрелять | 0; 0 | 2; -2 |
| Не стрелять | -2; -1 | -1; 1 |

Вероятность (1 – p)

# Дилемма шерифа

- От стрельбы шериф получает
  - **-1** с вероятностью **p** или **0** с вероятностью **(1-p)**
  - Итого: **-p**
- От не-стрельбы он получает
  - **0** с вероятностью **p** или **-2** с вероятностью **(1-p)**
  - Итого: **-2(1-p)**
- Он стреляет, если **-p > -2(1-p)**
- То есть, при вероятности «мирного жителя» меньше 2/3 – шериф стреляет

# Примеры

- Децентрализованное распределение ресурсов
  - *Akkarajitsakul K., Hossain E., Niyato D. Distributed resource allocation in wireless networks under uncertainty and application of Bayesian game //IEEE Communications Magazine. – 2011. – Т. 49. – №. 8. – С. 120-127.*
- Децентрализованная торговля ресурсами
  - *Xia S. et al. A Bayesian game based vehicle-to-vehicle electricity trading scheme for blockchain-enabled internet of vehicles //IEEE Transactions on Vehicular Technology. – 2020. – Т. 69. – №. 7. – С. 6856-6868.*
- Расчёт репутации (клиентов/посетителей сайта/…)
  - Dahiya A., Gupta B. B. A reputation score policy and Bayesian game theory based incentivized mechanism for DDoS attacks mitigation and cyber defense //Future Generation Computer Systems. – 2021. – Т. 117. – С. 193-204.

# Фокальная точка

- Шеллинг (1960): фокальная точка – равновесие «по умолчанию», которое выбирают люди в отсутствие коммуникации
- Примеры:
  - Раздел денег:
  - Встреча в городе:

  - Упорядочить буквы:

# Фокальная точка

- Шеллинг (1960): фокальная точка – равновесие «по умолчанию», которое выбирают люди в отсутствие коммуникации
- Примеры:
  - Раздел денег: **50 на 50**
  - Встреча в городе:
  - Упорядочить буквы:

# Фокальная точка

- Шеллинг (1960): фокальная точка – равновесие «по умолчанию», которое выбирают люди в отсутствие коммуникации
- Примеры:
  - Раздел денег: **50 на 50**
  - Встреча в городе: **на центральной площади / центральном вокзале в полдень**
  - Упорядочить буквы:

# Фокальная точка

- Шеллинг (1960): фокальная точка – равновесие «по умолчанию», которое выбирают люди в отсутствие коммуникации
- Примеры:
  - Раздел денег: **50 на 50**
  - Встреча в городе: **на центральной площади / центральном вокзале в полдень**
  - Упорядочить буквы: **ABC**

# Повторяющиеся игры

- Повторяющаяся дилемма заключённого: появляется стимул кооперироваться!
- Пример из статьи
  - *Andreoni J., Miller J. H. Rational cooperation in the finitely repeated prisoner's dilemma: Experimental evidence //The economic journal. – 1993. – Т. 103. – №. 418. – С. 570-585.*
- 4 варианта постановки задачи:
  - Одни и те же пары играют 10 раундов подряд
  - Каждый раз собираются новые случайные пары
  - Пары постоянные, но с вероятностью 50% соперником будет компьютер
  - Пары постоянные, но с вероятностью 0.1% соперником будет компьютер

# Повторяющаяся дилемма заключенного

- На графике изображена доля кооперирующихся игроков по раундам
- Чаще всего кооперируются с компьютером, реже всего – с незнакомцами
- Людей начинают предавать с 7 раунда из 10, компьютер – с 9

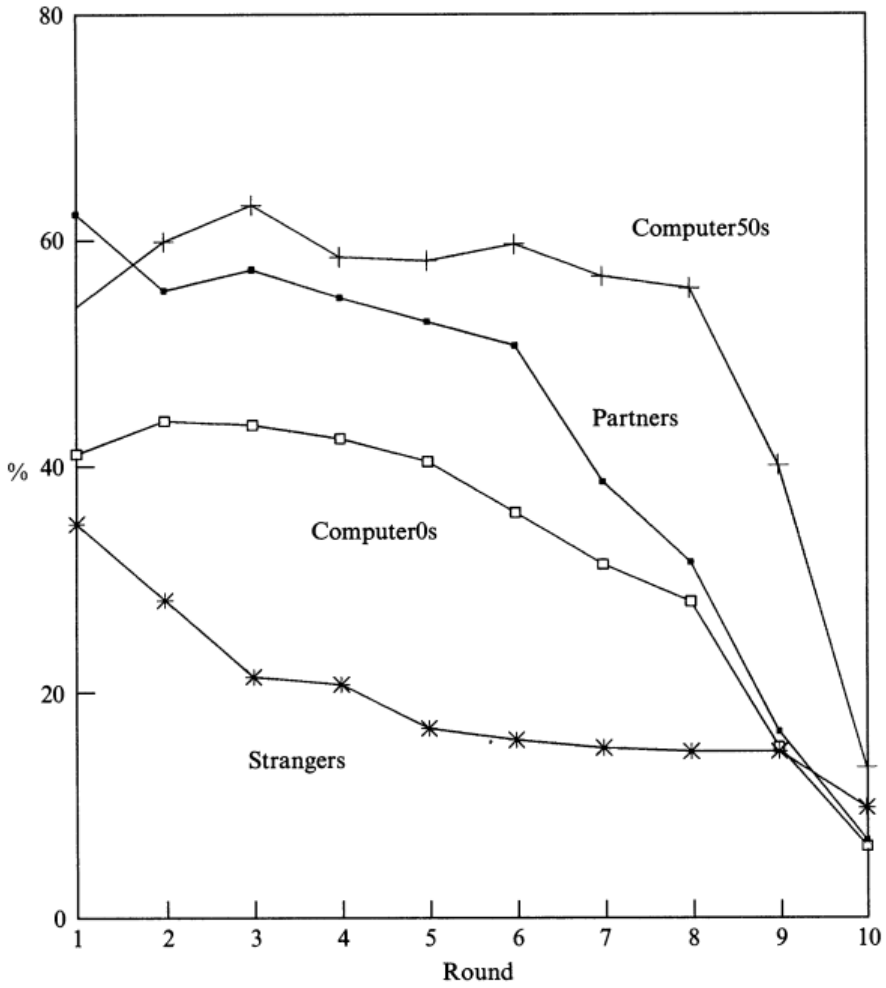


Fig. 2. Percent cooperation by round. Averaged over all 20 10-period games.