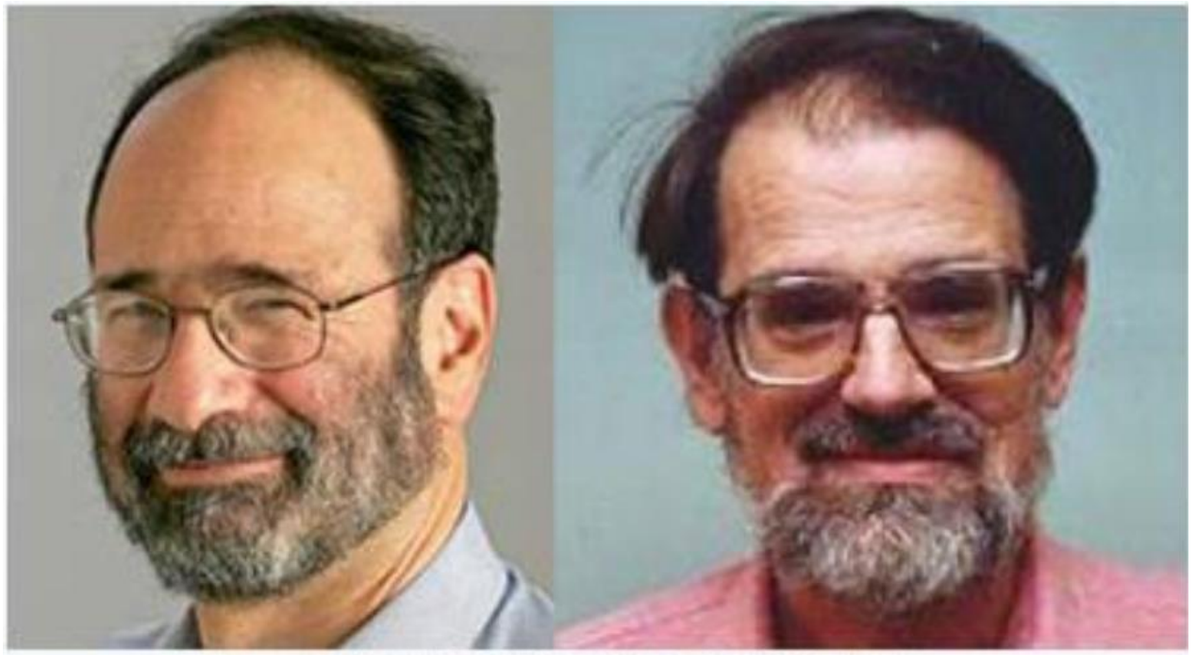
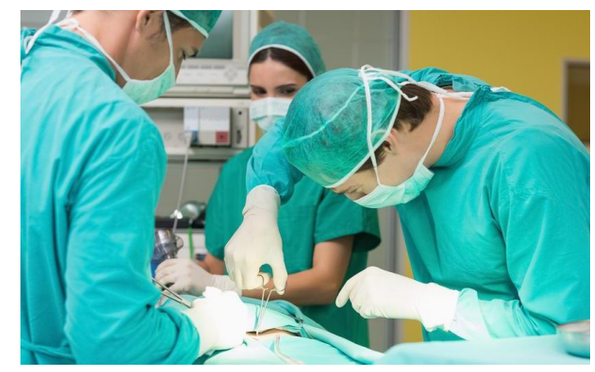
ОБОБЩЁННЫЕ ПАРОСОЧЕТАНИЯ

Егорова Людмила, НИУ ВШЭ



Элвин Рот и Ллойд Шепли

В 2012 году Ллойд Шепли (1923—2016) и Алвин Рот (1951) получили Нобелевскую премию по экономике «за теорию стабильного распределения и практики устройства рынков» (The Theory of Stable Allocations and the Practice of Market Design).



Обобщенные паросочетания или задача о свадьбах

- Пусть заданы множества мужчин и женщин, например:

$$M = \{m_1;\ m_2;\ m_3\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3\}$$

- И мужчины, и женщины имеют предпочтения относительно возможных женихов/невест:

$$P_{m_1}: w_2, w_1, w_3 \quad P_{w_1}: m_1, m_3, m_2$$
$$P_{m_2}: w_1, w_3, w_2 \quad P_{w_2}: m_3, m_1, m_2$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3 \quad P_{w_3}: m_1, m_3, m_2$$

Обобщенные паросочетания или задача о свадьбах

- Пусть заданы множества мужчин и женщин, например:

$$M = \{m_1;\ m_2;\ m_3\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3\}$$

- :И мужчины, и женщины имеют предпочтения относительно возможных женихов/невест:

$$P_{m_1}: w_2, w_1, w_3 \quad P_{w_1}: m_1, m_3, m_2$$
$$P_{m_2}: w_1, w_3, w_2 \quad P_{w_2}: m_3, m_1, m_2$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3 \quad P_{w_3}: m_1, m_3, m_2$$

- Такие предпочтения называются линейными порядками (то есть связными, транзитивными и ациклическими бинарным отношением).

Обобщенные паросочетания или задача о свадьбах

- Пусть заданы множества мужчин и женщин, например:

$$M = \{m_1;\ m_2;\ m_3\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3\}$$

- :И мужчины, и женщины имеют предпочтения относительно возможных женихов/невест:

$$P_{m_1}: w_2, w_1, w_3 \quad P_{w_1}: m_1, m_3, m_2$$
$$P_{m_2}: w_1, w_3, w_2 \quad P_{w_2}: m_3, m_1, m_2$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3 \quad P_{w_3}: m_1, m_3, m_2$$

- Такие предпочтения называются линейными порядками. А всегда ли можно представить свои предпочтения в таком виде?

Обобщенные паросочетания или задача о свадьбах

- Пусть заданы множества мужчин и женщин, например:

$$M = \{m_1;\ m_2;\ m_3\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3\}$$

- :И мужчины, и женщины имеют предпочтения относительно возможных женихов/невест:

$$P_{m_1}: w_2, w_1, w_3 \quad P_{w_1}: m_1, m_3, m_2$$
$$P_{m_2}: w_1, w_3, w_2 \quad P_{w_2}: m_3, m_1, m_2$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3 \quad P_{w_3}: m_1, m_3, m_2$$

- Такие предпочтения называются линейными порядками. А всегда ли можно представить свои предпочтения в таком виде?

- Например, иногда индивидуальные предпочтения могут содержать цикл. Студент, просыпаясь утром в субботу: «Хочется спать. Но раз проснулся так рано, то лучше пойду погуляю. Нет, надо делать домашку, но это морока на весь день… Лучше еще немного поспать!»

Обобщенные паросочетания или задача о свадьбах

- Пусть заданы множества мужчин и женщин, например:

$$M = \{m_1;\ m_2;\ m_3\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3\}$$

- :И мужчины, и женщины имеют предпочтения относительно возможных женихов/невест:

$$P_{m_1}: w_2, w_1, w_3 \quad P_{w_1}: m_1, m_3, m_2$$
$$P_{m_2}: w_1, w_3, w_2 \quad P_{w_2}: m_3, m_1, m_2$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3 \quad P_{w_3}: m_1, m_3, m_2$$

- Вообще говоря, не обязательно ранжировать всех потенциальных супругов:

$P_{m_1}: w_2, w_1, (m_1), w_3$ - мужчина m_1 ни при каких условиях не согласен жениться на женщине w_3,

$P_{w_2}: m_3, (w_2), m_1, m_2$ - женщина w_2 не выйдет замуж за мужчин m_1 и m_2

Обобщенные паросочетания или задача о свадьбах

- Паросочетание - это распределение людей на пары:

$$\mu = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_2 & w_1 & w_3 \end{matrix}$$

- Если кто-то остается в одиночестве, то в паросочетании это записывается так:

$$\mu = \begin{matrix} w_2 & w_1 & (m_3) & w_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \end{matrix}$$

Обобщенные паросочетания или задача о свадьбах

- Паросочетание - это распределение людей на пары:

$$\mu = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_2 & w_1 & w_3 \end{matrix}$$

- Как оценивать паросочетания?

Обобщенные паросочетания или задача о свадьбах

- Паросочетание - это распределение людей на пары:

$$\mu = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_2 & w_1 & w_3 \end{matrix}$$

- Вспомним предпочтения участников:

$$P_{m_1}: w_2, w_1, w_3 \quad P_{w_1}: m_1, m_3, m_2$$
$$P_{m_2}: w_1, w_3, w_2 \quad P_{w_2}: m_3, m_1, m_2$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3 \quad P_{w_3}: m_1, m_3, m_2$$

- И посмотрим на мужчину m_3 - счастлив ли он в браке?

Обобщенные паросочетания или задача о свадьбах

- Паросочетание - это распределение людей на пары:

$$\mu = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_2 & w_1 & w_3 \end{matrix}$$

- Вспомним предпочтения участников:

$$P_{m_1}: w_2, w_1, w_3 \quad P_{w_1}: m_1, m_3, m_2$$
$$P_{m_2}: w_1, w_3, w_2 \quad P_{w_2}: m_3, m_1, m_2$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3 \quad P_{w_3}: m_1, m_3, m_2$$

- И посмотрим на мужчину m_3 - счастлив ли он в браке? Нет, он должен жениться на женщине w_3, хотя он предпочел бы женщину w_1.

Обобщенные паросочетания или задача о свадьбах

- Паросочетание - это распределение людей на пары:

$$\mu = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_2 & w_1 & w_3 \end{matrix}$$

- Вспомним предпочтения участников:

$$P_{m_1}: w_2, w_1, w_3 \quad P_{w_1}: m_1, m_3, m_2$$
$$P_{m_2}: w_1, w_3, w_2 \quad P_{w_2}: m_3, m_1, m_2$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3 \quad P_{w_3}: m_1, m_3, m_2$$

- И посмотрим на мужчину m_3 - счастлив ли он в браке? Нет, он должен жениться на женщине w_3, хотя он предпочел бы женщину w_1. А хотела бы женщина w_1 быть с мужчиной m_3 больше, чем со своим супругом?

Обобщенные паросочетания или задача о свадьбах

- Паросочетание - это распределение людей на пары:

$$\mu = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_2 & w_1 & w_3 \end{matrix}$$

- Вспомним предпочтения участников:

$$P_{m_1}: w_2, w_1, w_3 \quad P_{w_1}: m_1, m_3, m_2$$
$$P_{m_2}: w_1, w_3, w_2 \quad P_{w_2}: m_3, m_1, m_2$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3 \quad P_{w_3}: m_1, m_3, m_2$$

- И посмотрим на мужчину m_3 - счастлив ли он в браке? Нет, он должен жениться на женщине w_3, хотя он предпочел бы женщину w_1. А хотела бы женщина w_1 быть с мужчиной m_3 больше, чем со своим супругом? Да, он для нее тоже более предпочтительный вариант!

Обобщенные паросочетания или задача о свадьбах

- Паросочетание - это распределение людей на пары:

$$\mu = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_2 & w_1 & w_3 \end{matrix}$$

- Вспомним предпочтения участников:

$$P_{m_1}: w_2, w_1, w_3 \quad P_{w_1}: m_1, m_3, m_2$$
$$P_{m_2}: w_1, w_3, w_2 \quad P_{w_2}: m_3, m_1, m_2$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3 \quad P_{w_3}: m_1, m_3, m_2$$

- И посмотрим на мужчину m_3 - счастлив ли он в браке? Нет, он должен жениться на женщине w_3, хотя он предпочел бы женщину w_1. А хотела бы женщина w_1 быть с мужчиной m_3 больше, чем со своим супругом? Да, он для нее тоже более предпочтительный вариант!

- Пара (m_3, w_1) является блокирующей парой для этого паросочетания.

Обобщенные паросочетания или задача о свадьбах

- Паросочетание - это распределение людей на пары:

$$\mu = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_2 & w_1 & w_3 \end{matrix}$$

- Вспомним предпочтения участников:

$$P_{m_1}: w_2, w_1, w_3 \quad P_{w_1}: m_1, m_3, m_2$$
$$P_{m_2}: w_1, w_3, w_2 \quad P_{w_2}: m_3, m_1, m_2$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3 \quad P_{w_3}: m_1, m_3, m_2$$

- И посмотрим на мужчину m_3 - счастлив ли он в браке? Нет, он должен жениться на женщине w_3, хотя он предпочел бы женщину w_1. А хотела бы женщина w_1 быть с мужчиной m_3 больше, чем со своим супругом? Да, он для нее тоже более предпочтительный вариант!

- Пара (m_3, w_1) является блокирующей парой для этого паросочетания.

- А будет ли пара (m_3, w_2) блокирующей для этого паросочетания?

Обобщенные паросочетания или задача о свадьбах

- Определение: Пара (m, w) называется блокирующей паросочетание μ, если пара (m, w) в паросочетание μ не входит, но для m женщина w более предпочтительна, чем та, которая предписана ему паросочетанием μ, и, симметрично, мужчина m для женщины w более предпочтителен, чем тот, кто ей предписан.

Обобщенные паросочетания или задача о свадьбах

- Еще одно важное требование к паросочетанию – оно должно быть индивидуально-рационально (т.е. никому нельзя приписать тот вариант, который был указан как неприемлемый).
- То есть никто из участников, имеющих предпочтения в виде

$$P(m_i) = w_{j_1}, \dots, w_{j_s}, (m_i), w_{j_{s+1}}, \dots, w_{j_p}$$

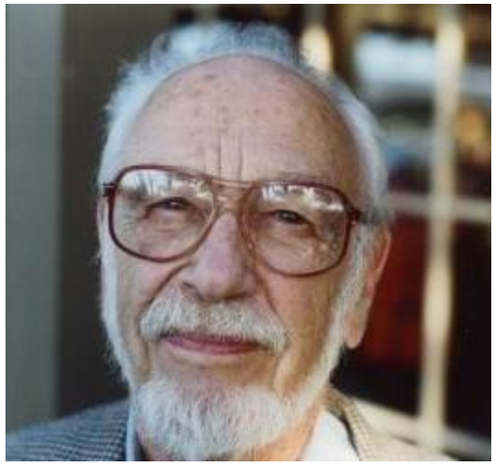
или $P(w_i) = m_{k_1}, \dots, m_{k_t}, (w_i), m_{k_{t+1}}, \dots, m_{k_t}$,

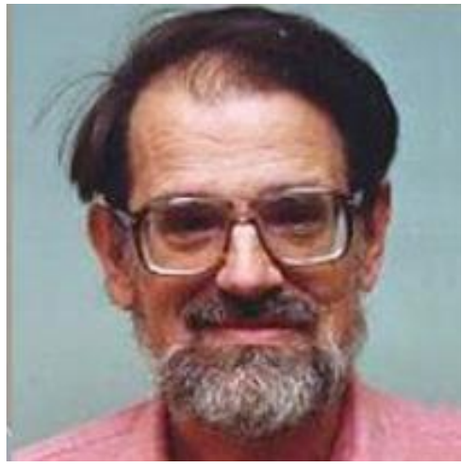
не получил пару из множеств $w_{j_{s+1}}, \dots, w_{j_p}$ и $m_{k_{t+1}}, \dots, m_{k_t}$, соответственно.

Обобщенные паросочетания или задача о свадьбах

- Паросочетание называется устойчивым, если
- 1) оно не содержит блокирующих пар,
- 2) оно индивидуально-рационально (т.е. никому нельзя приписать тот вариант, который был указан как неприемлемый).

- Механизм (алгоритм) «отложенного принятия» (deferred acceptance) Д.Гейла, Л.Шепли позволяет строить устойчивое паросочетание при любых предпочтениях участников.
- Существует две версии механизма – с предлагающими мужчинам и с предлагающими женщинами.





Пример

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2 \qquad P_{w_1}: m_2, m_1, m_4, m_3$$
$$P_{m_2}: w_4, w_2, w_3, w_1 \qquad P_{w_2}: m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_2, m_3, m_4, m_1$$
$$P_{m_4}: w_2, w_4, w_1, w_3 \qquad P_{w_4}: m_3, m_2, m_4, m_1$$

- Строим паросочетание с предлагающими мужчинами:

Пример

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2 \qquad P_{w_1}: m_2, m_1, m_4, m_3$$
$$P_{m_2}: w_4, w_2, w_3, w_1 \qquad P_{w_2}: m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_2, m_3, m_4, m_1$$
$$P_{m_4}: w_2, w_4, w_1, w_3 \qquad P_{w_4}: m_3, m_2, m_4, m_1$$

- Строим паросочетание с предлагающими мужчинами:

$$\mu_M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ w_4 & w_4 & w_1 & w_2 \end{pmatrix}$$

На первом этапе мужчины предлагают самым предпочтительным женщинам

Пример

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2 \qquad P_{w_1}: m_2, m_1, m_4, m_3$$
$$P_{m_2}: w_4, w_2, w_3, w_1 \qquad P_{w_2}: m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_2, m_3, m_4, m_1$$
$$P_{m_4}: w_2, w_4, w_1, w_3 \qquad P_{w_4}: m_3, m_2, m_4, m_1$$

- Строим паросочетание с предлагающими мужчинами:

$$\mu_M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ \cancel{w_4} & w_4 & w_1 & \cancel{w_2} \end{pmatrix}$$

На первом этапе мужчины предлагают самым предпочтительным женщинам

Пример

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2 \qquad P_{w_1}: m_2, m_1, m_4, m_3$$
$$P_{m_2}: w_4, w_2, w_3, w_1 \qquad P_{w_2}: m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_2, m_3, m_4, m_1$$
$$P_{m_4}: w_2, w_4, w_1, w_3 \qquad P_{w_4}: m_3, m_2, m_4, m_1$$

- Строим паросочетание с предлагающими мужчинами:

$$\mu_M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ \cancel{w_4} & w_4 & w_1 & \cancel{w_2} \end{pmatrix}$$
$$\mu_M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ w_3 & w_4 & w_1 & w_4 \end{pmatrix}$$

На первом этапе мужчины предлагают самым предпочтительным женщинам

На втором этапе отвергнутые мужчины предлагают вторым по предпочтительности женщинам

Пример

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2 \qquad P_{w_1}: m_2, m_1, m_4, m_3$$
$$P_{m_2}: w_4, w_2, w_3, w_1 \qquad P_{w_2}: m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_2, m_3, m_4, m_1$$
$$P_{m_4}: w_2, w_4, w_1, w_3 \qquad P_{w_4}: m_3, m_2, m_4, m_1$$

- Строим паросочетание с предлагающими мужчинами:

$$\mu_M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ \cancel{w_4} & w_4 & w_1 & \cancel{w_2} \end{pmatrix}$$
$$\mu_M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ w_3 & w_4 & w_1 & \cancel{w_4} \end{pmatrix}$$

На первом этапе мужчины предлагают самым предпочтительным женщинам

На втором этапе отвергнутые мужчины предлагают вторым по предпочтительности женщинам

Пример

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2 \qquad P_{w_1}: m_2, m_1, m_4, m_3$$
$$P_{m_2}: w_4, w_2, w_3, w_1 \qquad P_{w_2}: m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_2, m_3, m_4, m_1$$
$$P_{m_4}: w_2, w_4, w_1, w_3 \qquad P_{w_4}: m_3, m_2, m_4, m_1$$

- Строим паросочетание с предлагающими мужчинами:

$$\mu_M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ \cancel{w_4} & w_4 & w_1 & \cancel{w_2} \end{pmatrix}$$
$$\mu_M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ w_3 & w_4 & w_1 & \cancel{w_4} \end{pmatrix}$$
$$\mu_M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ w_3 & w_4 & \cancel{w_1} & w_1 \end{pmatrix}$$

На первом этапе мужчины предлагают самым предпочтительным женщинам

На втором этапе отвергнутые мужчины предлагают вторым по предпочтительности женщинам

Пример

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2 \qquad P_{w_1}: m_2, m_1, m_4, m_3$$
$$P_{m_2}: w_4, w_2, w_3, w_1 \qquad P_{w_2}: m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_2, m_3, m_4, m_1$$
$$P_{m_4}: w_2, w_4, w_1, w_3 \qquad P_{w_4}: m_3, m_2, m_4, m_1$$

- Строим паросочетание с предлагающими мужчинами:

$$\mu_M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ w_4 & w_4 & w_1 & w_2 \end{pmatrix}$$
$$\mu_M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ w_3 & w_4 & w_1 & w_4 \end{pmatrix}$$
$$\mu_M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ w_3 & w_4 & w_1 & w_1 \end{pmatrix}$$
$$\mu_M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ w_3 & w_4 & w_2 & w_1 \end{pmatrix}$$

На первом этапе мужчины предлагают самым предпочтительным женщинам

На втором этапе отвергнутые мужчины предлагают вторым по предпочтительности женщинам

Обобщенные паросочетания или задача о свадьбах

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2 \qquad P_{w_1}: m_2, m_1, m_4, m_3$$
$$P_{m_2}: w_4, w_2, w_3, w_1 \qquad P_{w_2}: m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_2, m_3, m_4, m_1$$
$$P_{m_4}: w_2, w_4, w_1, w_3 \qquad P_{w_4}: m_3, m_2, m_4, m_1$$

- Строим паросочетание с предлагающими мужчинами:

$$\mu_M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ \cancel{w_4} & w_4 & w_1 & \cancel{w_2} \end{pmatrix}$$
$$\mu_M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ w_3 & w_4 & w_1 & \cancel{w_4} \end{pmatrix}$$
$$\mu_M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ w_3 & w_4 & \cancel{w_1} & w_1 \end{pmatrix}$$
$$\mu_M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ w_3 & w_4 & w_2 & w_1 \end{pmatrix}$$

На первом этапе мужчины предлагают самым предпочтительным женщинам
На втором этапе отвергнутые мужчины предлагают вторым по предпочтительности женщинам

- Почему это паросочетание будет устойчивым?

Пример

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2 \qquad P_{w_1}: m_2, m_1, m_4, m_3$$
$$P_{m_2}: w_4, w_2, w_3, w_1 \qquad P_{w_2}: m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_2, m_3, m_4, m_1$$
$$P_{m_4}: w_2, w_4, w_1, w_3 \qquad P_{w_4}: m_3, m_2, m_4, m_1$$

- Теперь построим паросочетание с предлагающими женщинами:

$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_2 & m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

На первом этапе женщины приписываются своим самым предпочтительным мужчинам

Пример

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2 \qquad P_{w_1}: m_2, m_1, m_4, m_3$$
$$P_{m_2}: w_4, w_2, w_3, w_1 \qquad P_{w_2}: m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_2, m_3, m_4, m_1$$
$$P_{m_4}: w_2, w_4, w_1, w_3 \qquad P_{w_4}: m_3, m_2, m_4, m_1$$

- Теперь построим паросочетание с предлагающими женщинами:

$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ \cancel{m_2} & \cancel{m_1} & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

На первом этапе женщины приписываются своим самым предпочтительным мужчинам

Пример

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2 \qquad P_{w_1}: m_2, m_1, m_4, m_3$$
$$P_{m_2}: w_4, w_2, w_3, w_1 \qquad P_{w_2}: m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_2, m_3, m_4, m_1$$
$$P_{m_4}: w_2, w_4, w_1, w_3 \qquad P_{w_4}: m_3, m_2, m_4, m_1$$

- Теперь построим паросочетание с предлагающими женщинами:

$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ \cancel{m_2} & \cancel{m_1} & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

На первом этапе женщины приписываются своим самым предпочтительным мужчинам

$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

На втором этапе отвергнутые женщины приписываются вторым по предпочтительности мужчинам

Пример

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2 \qquad P_{w_1}: m_2, m_1, m_4, m_3$$
$$P_{m_2}: w_4, w_2, w_3, w_1 \qquad P_{w_2}: m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_2, m_3, m_4, m_1$$
$$P_{m_4}: w_2, w_4, w_1, w_3 \qquad P_{w_4}: m_3, m_2, m_4, m_1$$

- Теперь построим паросочетание с предлагающими женщинами:

$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_2 & m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$
$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

На первом этапе женщины приписываются своим самым предпочтительным мужчинам

На втором этапе отвергнутые женщины приписываются вторым по предпочтительности мужчинам

Пример

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2 \qquad P_{w_1}: m_2, m_1, m_4, m_3$$
$$P_{m_2}: w_4, w_2, w_3, w_1 \qquad P_{w_2}: m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_2, m_3, m_4, m_1$$
$$P_{m_4}: w_2, w_4, w_1, w_3 \qquad P_{w_4}: m_3, m_2, m_4, m_1$$

- Теперь построим паросочетание с предлагающими женщинами:

$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_2 & m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$
$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$
$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_3 \end{pmatrix}$$

На первом этапе женщины приписываются своим самым предпочтительным мужчинам

На втором этапе отвергнутые женщины приписываются вторым по предпочтительности мужчинам

Пример

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2 \qquad P_{w_1}: m_2, m_1, m_4, m_3$$
$$P_{m_2}: w_4, w_2, w_3, w_1 \qquad P_{w_2}: m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_2, m_3, m_4, m_1$$
$$P_{m_4}: w_2, w_4, w_1, w_3 \qquad P_{w_4}: m_3, m_2, m_4, m_1$$

- Теперь построим паросочетание с предлагающими женщинами:

$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_2 & m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$
$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$
$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_3 \end{pmatrix}$$

На первом этапе женщины приписываются своим самым предпочтительным мужчинам

На втором этапе отвергнутые женщины приписываются вторым по предпочтительности мужчинам

Пример

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2 \qquad P_{w_1}: m_2, m_1, m_4, m_3$$
$$P_{m_2}: w_4, w_2, w_3, w_1 \qquad P_{w_2}: m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_2, m_3, m_4, m_1$$
$$P_{m_4}: w_2, w_4, w_1, w_3 \qquad P_{w_4}: m_3, m_2, m_4, m_1$$

- Теперь построим паросочетание с предлагающими женщинами:

$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_2 & m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$
$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$
$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_3 \end{pmatrix}$$
$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_2 \end{pmatrix}$$

На первом этапе женщины приписываются своим самым предпочтительным мужчинам

На втором этапе отвергнутые женщины приписываются вторым по предпочтительности мужчинам

Пример

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2 \qquad P_{w_1}: m_2, m_1, m_4, m_3$$
$$P_{m_2}: w_4, w_2, w_3, w_1 \qquad P_{w_2}: m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_2, m_3, m_4, m_1$$
$$P_{m_4}: w_2, w_4, w_1, w_3 \qquad P_{w_4}: m_3, m_2, m_4, m_1$$

- Теперь построим паросочетание с предлагающими женщинами:

$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_2 & m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$
$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$
$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_3 \end{pmatrix}$$
$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_2 \end{pmatrix}$$

На первом этапе женщины приписываются своим самым предпочтительным мужчинам

На втором этапе отвергнутые женщины приписываются вторым по предпочтительности мужчинам

Пример

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2 \qquad P_{w_1}: m_2, m_1, m_4, m_3$$
$$P_{m_2}: w_4, w_2, w_3, w_1 \qquad P_{w_2}: m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_2, m_3, m_4, m_1$$
$$P_{m_4}: w_2, w_4, w_1, w_3 \qquad P_{w_4}: m_3, m_2, m_4, m_1$$

- Теперь построим паросочетание с предлагающими женщинами:

$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_2 & m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$
$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$
$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_3 \end{pmatrix}$$
$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_2 \end{pmatrix}$$
$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_3 & m_3 & m_2 \end{pmatrix}$$

На первом этапе женщины приписываются своим самым предпочтительным мужчинам

На втором этапе отвергнутые женщины приписываются вторым по предпочтительности мужчинам

Пример

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2 \qquad P_{w_1}: m_2, m_1, m_4, m_3$$
$$P_{m_2}: w_4, w_2, w_3, w_1 \qquad P_{w_2}: m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_2, m_3, m_4, m_1$$
$$P_{m_4}: w_2, w_4, w_1, w_3 \qquad P_{w_4}: m_3, m_2, m_4, m_1$$

- Теперь построим паросочетание с предлагающими женщинами:

$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_2 & m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$
$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$
$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_3 \end{pmatrix}$$
$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_2 \end{pmatrix}$$
$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_3 & m_3 & m_2 \end{pmatrix}$$

На первом этапе женщины приписываются своим самым предпочтительным мужчинам

На втором этапе отвергнутые женщины приписываются вторым по предпочтительности мужчинам

Пример

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2 \qquad P_{w_1}: m_2, m_1, m_4, m_3$$
$$P_{m_2}: w_4, w_2, w_3, w_1 \qquad P_{w_2}: m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_2, m_3, m_4, m_1$$
$$P_{m_4}: w_2, w_4, w_1, w_3 \qquad P_{w_4}: m_3, m_2, m_4, m_1$$

- Теперь построим паросочетание с предлагающими женщинами:

$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_2 & m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

На первом этапе женщины приписываются своим самым предпочтительным мужчинам

$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

На втором этапе отвергнутые женщины приписываются вторым по предпочтительности мужчинам

$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_2 \end{pmatrix}$$

$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_3 & m_3 & m_2 \end{pmatrix}$$

$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_3 & m_4 & m_2 \end{pmatrix}$$

Пример

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3;\ m_4\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_4, w_3, w_1, (m_1), w_2 \qquad P_{w_1}: m_2, m_1, m_4, m_3$$
$$P_{m_2}: w_4, w_2, w_3, w_1 \qquad P_{w_2}: m_1, m_2, m_3, (w_2), m_4$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_2, m_3, m_4, m_1$$
$$P_{m_4}: w_2, w_4, w_1, w_3 \qquad P_{w_4}: m_3, m_2, m_4, m_1$$

- Итак, мы построили два устойчивых паросочетания:

$$\mu_M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ w_3 & w_4 & w_2 & w_1 \end{pmatrix}$$

$$\mu_W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ m_1 & m_3 & m_4 & m_2 \end{pmatrix}$$

- Совпадают ли эти паросочетания? Кому более предпочтительно μ_M, а кому - μ_W?

Манипулирование

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_1, w_2, w_4, w_3 \qquad P_{w_1}: m_1, m_2, m_3$$
$$P_{m_2}: w_3, w_1, w_2, w_4 \qquad P_{w_2}: m_2, m_1, m_3$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_1, m_3, m_2$$
$$P_{w_4}: m_3, m_2, m_1$$

- Построим паросочетание μ_M.

Манипулирование

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_1, w_2, w_4, w_3 \qquad P_{w_1}: m_1, m_2, m_3$$
$$P_{m_2}: w_3, w_1, w_2, w_4 \qquad P_{w_2}: m_2, m_1, m_3$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_1, m_3, m_2$$
$$P_{w_4}: m_3, m_2, m_1$$

- Построим паросочетание μ_M:
- $\mu_M = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_1 & w_3 & \cancel{w_1} \end{matrix}$

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_1, w_2, w_4, w_3 \qquad P_{w_1}: m_1, m_2, m_3$$
$$P_{m_2}: w_3, w_1, w_2, w_4 \qquad P_{w_2}: m_2, m_1, m_3$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_1, m_3, m_2$$
$$P_{w_4}: m_3, m_2, m_1$$

- Построим паросочетание μ_M:
- $\mu_M = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_1 & w_3 & \cancel{w_1} \end{matrix}$
- $\mu_M = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_1 & w_3 & w_2 \end{matrix}$

Манипулирование

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_1, w_2, w_4, w_3 \qquad P_{w_1}: m_1, m_2, m_3$$
$$P_{m_2}: w_3, w_1, w_2, w_4 \qquad P_{w_2}: m_2, m_1, m_3$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_1, m_3, m_2$$
$$P_{w_4}: m_3, m_2, m_1$$

- Построим паросочетание μ_M:
- $\mu_M = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_1 & w_3 & \cancel{w_1} \end{matrix}$
- $\mu_M = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_1 & w_3 & w_2 \end{matrix}$
- Но женщина w_3 не очень довольна!

Манипулирование

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_1, w_2, w_4, w_3 \qquad P_{w_1}: m_1, m_2, m_3$$
$$P_{m_2}: w_3, w_1, w_2, w_4 \qquad P_{w_2}: m_2, m_1, m_3$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_1, m_3, m_2$$
$$P_{w_4}: m_3, m_2, m_1$$

- Построим паросочетание μ_M:
- $\mu_M = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_1 & w_3 & \cancel{w_1} \end{matrix}$
- $\mu_M = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_1 & w_3 & w_2 \end{matrix}$
- Но женщина w_3 не очень довольна! Предположим, что она предоставит для алгоритма свои неискренние предпочтения $P_{w_3}: m_1, m_3, (w_3), m_2$

Манипулирование

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_1, w_2, w_4, w_3 \qquad P_{w_1}: m_1, m_2, m_3$$
$$P_{m_2}: w_3, w_1, w_2, w_4 \qquad P_{w_2}: m_2, m_1, m_3$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_1, m_3, m_2$$
$$P_{w_4}: m_3, m_2, m_1$$

- Построим паросочетание μ_M:

$$\mu_M = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_1 & w_3 & \cancel{w_1} \end{matrix}$$

$$\mu_M = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_1 & \cancel{w_3} & \cancel{w_1} \end{matrix}$$

$$\mu_M = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_1 & \cancel{w_1} & w_2 \end{matrix}$$

- $\mu_M = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_1 & w_3 & w_2 \end{matrix}$

- Но женщина w_3 не очень довольна! Предположим, что она предоставит для алгоритма свои неискренние предпочтения $P_{w_3}: m_1, m_3, (w_3), m_2$

Манипулирование

- Пусть $M = \{m_1;\ m_2;\ m_3\}, W = \{w_1;\ w_2;\ w_3;\ w_4\}$ и

$$P_{m_1}: w_1, w_2, w_4, w_3 \qquad P_{w_1}: m_1, m_2, m_3$$
$$P_{m_2}: w_3, w_1, w_2, w_4 \qquad P_{w_2}: m_2, m_1, m_3$$
$$P_{m_3}: w_1, w_2, w_3, w_4 \qquad P_{w_3}: m_1, m_3, m_2$$
$$P_{w_4}: m_3, m_2, m_1$$

- Построим паросочетание μ_M:
- $\mu_M = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_1 & w_3 & \cancel{w_1} \end{matrix}$
- $\mu_M = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_1 & w_3 & w_2 \end{matrix}$

$$\mu_M = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_1 & \cancel{w_3} & \cancel{w_1} \end{matrix}$$
$$\mu_M = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_1 & \cancel{w_1} & w_2 \end{matrix}$$
$$\mu_M = \begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ w_1 & w_2 & \cancel{w_2} \end{matrix}$$

- Но женщина w_3 не очень довольна! Предположим, что она предоставит для алгоритма свои неискренние предпочтения $P_{w_3}: m_1, m_3, (w_3), m_2$

Обобщенные паросочетания «один-ко-многим»

- Можно использовать эту модель для паросочетаний «один-ко-многим».
- При этом предполагается, что у каждого элемента из числа тех, кому можно приписать несколько элементов из другого множества, может быть разная «вместимость», т.е. число элементов, которых можно поставить ему в соответствие.
- Пример такого рода паросочетаний – распределение абитуриентов a по вузам U с разным числом свободных мест q_U.
- Для таких моделей можно применить вариант алгоритма отложенного принятия, в котором на каждом этапе вузу можно приписывать не одного, а несколько абитуриентов согласно числу мест, оставшихся у него свободными на данном этапе.

Обобщенные паросочетания «один-ко-многим»

- Пусть есть 7 абитуриентов $A = \{a_1;\ a_2; \dots;\ a_7\}$ и 3 университета $S = \{S_1;\ S_2;\ S_3\}$, каждый из которых может принять не более двух студентов.
- Предпочтения участников:

$$P_{S_1} = P_{S_2}: a_1, a_2, a_3, \dots, a_7$$
$$P_{S_3}: a_6, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_7$$

$$P_{a_1} = P_{a_3} = P_{a_5} = P_{a_6}: S_1, S_3, S_2$$
$$P_{a_2} = P_{a_4}: S_3, S_2, S_1$$
$$P_{a_7}: S_2, S_3, S_1$$

Обобщенные паросочетания «один-ко-многим»

- Пусть есть 7 абитуриентов $A = \{a_1;\ a_2; \dots;\ a_7\}$ и 3 университета $S = \{S_1;\ S_2;\ S_3\}$, каждый из которых может принять не более двух студентов.
- Предпочтения участников:

$$P_{S_1} = P_{S_2}: a_1, a_2, a_3, \dots, a_7$$
$$P_{S_3}: a_6, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_7$$

$$P_{a_1} = P_{a_3} = P_{a_5} = P_{a_6}: S_1, S_3, S_2$$
$$P_{a_2} = P_{a_4}: S_3, S_2, S_1$$
$$P_{a_7}: S_2, S_3, S_1$$

- Строим паросочетание с предлагающими абитуриентами:

$$\mu = \begin{matrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ a_{1,3,\cancel{5},\cancel{6}} & a_7 & a_{2,4} \end{matrix}$$

Обобщенные паросочетания «один-ко-многим»

- Пусть есть 7 абитуриентов $A = \{a_1;\ a_2; \dots;\ a_7\}$ и 3 университета $S = \{S_1;\ S_2;\ S_3\}$, каждый из которых может принять не более двух студентов.
- Предпочтения участников:

$$P_{S_1} = P_{S_2}: a_1, a_2, a_3, \dots, a_7$$
$$P_{S_3}: a_6, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_7$$

$$P_{a_1} = P_{a_3} = P_{a_5} = P_{a_6}: S_1, S_3, S_2$$
$$P_{a_2} = P_{a_4}: S_3, S_2, S_1$$
$$P_{a_7}: S_2, S_3, S_1$$

- Строим паросочетание с предлагающими абитуриентами:

$$\mu = \begin{matrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ a_{1,3,\cancel{5},\cancel{6}} & a_7 & a_{2,4} \end{matrix}$$

$$\mu = \begin{matrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ a_{1,3} & a_7 & a_{2,\cancel{4},\cancel{5},6} \end{matrix}$$

Обобщенные паросочетания «один-ко-многим»

- Пусть есть 7 абитуриентов $A = \{a_1;\ a_2; \dots;\ a_7\}$ и 3 университета $S = \{S_1;\ S_2;\ S_3\}$, каждый из которых может принять не более двух студентов.
- Предпочтения участников:

$$P_{S_1} = P_{S_2}: a_1, a_2, a_3, \dots, a_7$$
$$P_{S_3}: a_6, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_7$$

$$P_{a_1} = P_{a_3} = P_{a_5} = P_{a_6}: S_1, S_3, S_2$$
$$P_{a_2} = P_{a_4}: S_3, S_2, S_1$$
$$P_{a_7}: S_2, S_3, S_1$$

- Строим паросочетание с предлагающими абитуриентами:

$$\mu = \begin{matrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ a_{1,3,\cancel{5},\cancel{6}} & a_7 & a_{2,4} \end{matrix}$$

$$\mu = \begin{matrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ a_{1,3} & a_7 & a_{2,\cancel{4},\cancel{5},6} \end{matrix}$$

$$\mu = \begin{matrix} S_1 & S_2 & S_3 \\ a_{1,3} & a_{\cancel{7},4,5} & a_{2,6} \end{matrix}$$

Практическое применение

- Практическое применение:
- Программа распределения в терапевтической интернатуре США (National Resident Matching Program).
- Распределение по школам в школьных округах Бостона и Нью-Йорка.
- Пересадка почек в США.

Алвин Рот

Спасибо за внимание!