О параболическом и гиперболическом 2-го порядка возмущениях гиперболической системы 1-го порядка

А.А. Злотник (совместно с Б.Н. Четверушкиным)

НИУ Высшая школа экономики, Москва; ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Всероссийская научная конференция

«Теоретические основы конструирования численных алгоритмов и решение задач математической физики»

Пущино, 24-26 августа 2022

1. Введение
2. Функциональные пространства
3. Задача Коши для симметричной гиперболической системы 1-го порядка
4. Возмущение — задача Коши для параболической системы уравнений 2-го порядка
5. Возмущение — задача Коши для гиперболической системы уравнений 2-го порядка
6. Оценки разности решений задач Коши для системы уравнений 1-го порядка и ее возмущений 2-го порядка
7. Оценки производных любого порядка решений задач Коши и их разностей
8. Приложение: линеаризованные на постоянном решении система уравнений газовой динамики и КГД системы уравнений

Изучаются задачи Коши для n-мерной симметричной гиперболической системы уравнений 1-го порядка с переменными коэффициентами и ее сингулярных возмущений — сильно параболической и гиперболической 2-го порядка систем уравнений с малым параметром $\tau > 0$ при 2-х производных по x и t.

Возмущения со 2-ми производными по x имеют дивергентный вид и содержат матрицы с переменными коэффициентами. Они могут быть полезны в том числе при построении численных методов решения гиперболических систем 1-го порядка, и подобное уже реализовано и много лет используется на практике для квазилинейной системы уравнений газовой динамики:
Б.Н. Четверушкин, *Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений*, 2004.
Т.Г. Елизарова, *Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений*, 2007.
Б.Н. Четверушкин, *Матем. моделирование*, **30**:2 (2018).

Параболическое возмущение является вариантом хорошо известного метода искусственной вязкости.

Гиперболическое возмущение в разных постановках, в основном для исходного гиперболического уравнения, а не системы, но включая квазилинейный случай и случай начально-краевых задач:

Д.Д. Коул, *Методы возмущений в прикладной математике*, 1972.
G. Genet, M. Madaune, *J. Math. Anal. Appl.*, **64** (1978).
Л.Р. Волевич, М.Г Джавадов, *Дифф. уравнения*, **19**:12 (1983).
A. Van Harten, R.R. Van Hassel, *SIAM J. Math. Anal.*, **16**:6 (1985).
S. Schochet, *Commun. Part. Diff. Equat.*, **12**:6 (1987).
H. Fattorini, *J. Diff. Equat.*, **70** (1987).
E.M. De Jager, J. Furu, *The theory of singular perturbations*, 1996 и др.

Эванс Л.К. *Уравнения с частными производными.* 2003.
Мизохата С. *Теория уравнений с частными производными.* 1977.
Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*. 1967.
Ладыженская О.А. *Краевые задачи математической физики.* 1973.
Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* 1978.
Берг Й., Лефстрем Й. *Интерполяционные пространства.* 1980.

1. Гильбертовы пространства Лебега $L^2(\mathbb{R}^n) = H^0(\mathbb{R}^n)$ и Соболева $H^1(\mathbb{R}^n)$, $H^2(\mathbb{R}^n)$ со скалярными произведениями

$$(v,w)_{H^l(\mathbb{R}^n)} = \sum_{0\leqslant k\leqslant l} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla^k v \cdot \nabla^k w \, dx, \ l = 0,1,2.$$

Здесь $\nabla = (\partial_1, \dots \partial_n)$, $\nabla^2 = \{\partial_i \partial_j\}_{i,j=1}^n$ — матрица 2-х производных по x, $n \geqslant 1$, и $\cdot$ — скалярное произведение векторов или матриц.
2. Пространство Соболева $H^1(\Pi_T)$, $\Pi_T := \mathbb{R}^n \times (0,T)$ — слой, $T > 0$ — любое, и анизотропные пространства Лебега и Соболева

$$\|v\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} = \|\|v(x,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|_{L^q(0,T)}, \ 1 \leqslant q \leqslant \infty,$$

$$\|v\|_{W^{1,0}_{2,q}(\Pi_T)} = \|\{v, \nabla v\}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} \equiv \|v\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} + \|\nabla v\|_{L^{2,q}(\Pi_T)},$$

$$\|v\|_{W^{2,0}_{2,q}(\Pi_T)} = \|\{v, \nabla v, \nabla^2 v\}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)},$$

$$\|v\|_{W^{l,1}_{2,q}(\Pi_T)} = \|v\|_{W^{l,0}_{2,q}(\Pi_T)} + \|\partial_t v\|_{L^{2,q}(\Pi_T)}, \ l = 1,2.$$

Пусть $V_2(\Pi_T)$ — пространство функций $v \in L^{2,\infty}(\Pi_T)$ с $\nabla v \in L^2(\Pi_T)$, $C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))$ состоит из непрерывных функций v: $[0,T] \to L^2(\mathbb{R}^n)$ и $\|v\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant T} \|v(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Пусть $(\mathbf{v},\mathbf{w})_{\mathbb{R}^n} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\,dx$, $(\mathbf{v},\mathbf{w})_{\Pi_T} = \int\limits_{\Pi_T} \mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\,dxdt$
для вектор-функций $\mathbf{v},\mathbf{w}$: $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}\in L^1(\mathbb{R}^n)$ или $L^1(\Pi_T)$ соответственно.
Задача Коши для симметричной гиперболической системы 1-го порядка

$$\mathcal{H}\mathbf{w} := \partial_t\mathbf{w} + B_i\partial_i\mathbf{w} + C\mathbf{w} = \mathbf{f} \ \text{ в } \ \Pi_T := \mathbb{R}^n\times(0,T),$$
$$\mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{w}_0 \ \text{ в } \ \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{w}(x,t),\mathbf{f}(x,t)$: $\Pi_T\to\mathbb{R}^m$, $\mathbf{w}_0(x)$: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ — искомая и заданные вектор-функции,
$B_i(x,t) = B_i^T(x,t)$, $i=\overline{1,n}$, $C(x,t)$ — коэффициенты-матрицы порядка m.
Пусть выполнены условия

$$\mathbf{B}, \operatorname{div}\mathbf{B} := \partial_i B_i, C\in L^\infty(\Pi_T), \quad \mathbf{f}\in L^{2,1}(\Pi_T), \quad \mathbf{w}_0\in L^2(\mathbb{R}^n), \tag{2}$$

где $\mathbf{B} = (B_1,\ldots,B_n)$ — составная матрица размеров $m\times mn$.

Слабым решением задачи Коши (1) назовем функцию $\mathbf{w} \in L^{2,\infty}(\Pi_T)$:

$$(\mathbf{w}, \mathcal{H}^*\boldsymbol{\varphi})_{\Pi_T}$$
$$= \ell(\mathbf{w}_0, \mathbf{f}; \boldsymbol{\varphi}) := (\mathbf{w}_0, \boldsymbol{\varphi}_0)_{\mathbb{R}^n} + (\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi})_{\Pi_T} \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in W^{1,1}_{2,1}(\Pi_T), \ \boldsymbol{\varphi}|_{t=T} = 0,$$

где $\mathcal{H}^*\boldsymbol{\varphi} = -\partial_t\boldsymbol{\varphi} - B_i\partial_i\boldsymbol{\varphi} - (\operatorname{div}\mathbf{B} - C^T)\boldsymbol{\varphi}$ — сопряженный по Лагранжу к $\mathcal{H}$ оператор, а $\boldsymbol{\varphi}(x,t)$: $\Pi_T \to \mathbb{R}^m$ и $\boldsymbol{\varphi}_0 := \boldsymbol{\varphi}|_{t=0}$.

Сильным решением этой задачи Коши назовем функцию $\mathbf{w} \in L^{2,\infty}(\Pi_T)$, имеющую $\nabla\mathbf{w} \in L^{2,\infty}(\Pi_T)$, $\partial_t\mathbf{w} \in L^{2,1}(\Pi_T)$ и удовлетворяющую уравнению в (1) в $L^{2,1}(\Pi_T)$ и начальному условию $\mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{w}_0$ в $C(0,T; L^2(\mathbb{R}^n))$.

Теорема 1.

1. а) Пусть выполнены условия (2) и $0.5\operatorname{div}\mathbf{B} - C \leqslant c_0 I_m$ почти всюду (п.в.) в Π_T с постоянной $c_0 \geqslant 0$ (напр., $c_0 = \|0.5\operatorname{div}\mathbf{B} - C\|_{L^\infty(\Pi_T)}$). Тогда существует слабое решение $\mathbf{w}$ задачи Коши (1) и верна оценка

$$\|\mathbf{w}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} \leqslant e^{c_0 T}\big(\|\mathbf{w}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\|\mathbf{f}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)}\big).$$

Теорема 1 (продолжение).

б) Более того, если $\nabla\mathbf{B} \in L^\infty(\Pi_T)$, $\lim_{\xi\to 0}\int_0^T \|\Delta_\xi C\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\,dt = 0$, где $\Delta_\xi C(x,t) := C(x+\xi,t) - C(x,t)$, то слабое решение единственно. Также $\mathbf{w} \in C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))$ и поэтому $\|\mathbf{w}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} = \|\mathbf{w}\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))}$.

2. Пусть $\|\{\mathbf{B}, C, \nabla\mathbf{B}, \nabla C\}\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leqslant N$ и $\mathbf{f}, \nabla\mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{w}_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда слабое решение $\mathbf{w}$ является сильным решением, оно единственно и верна оценка

$$\|\nabla\mathbf{w}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} + \|\partial_t\mathbf{w}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} \leqslant C_1(N,T)\big(\|\mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W^{1,0}_{2,1}(\Pi_T)}\big).$$

Если также $\mathbf{f} \in L^{2,q}(\Pi_T)$ при некотором $1 \leqslant q \leqslant \infty$, то $\partial_t\mathbf{w} \in L^{2,q}(\Pi_T)$ и

$$\|\partial_t\mathbf{w}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} \leqslant C_2(N,T)\big(\|\mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} + \|\nabla\mathbf{f}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)}\big).$$

Теорема 1 (продолжение).

3. а) Пусть дополнительно $\|\{\nabla^2\mathbf{B}, \nabla^2 C\}\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leqslant N$ и $\nabla^2\mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{w}_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда для сильного решения $\mathbf{w}$ существуют $\nabla^2\mathbf{w} \in L^{2,\infty}(\Pi_T)$, $\partial_t\nabla\mathbf{w} \in L^{2,1}(\Pi_T)$ и

$$\|\nabla^2\mathbf{w}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} + \|\partial_t\nabla\mathbf{w}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} \leqslant C_3(N,T)\big(\|\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W^{2,0}_{2,1}(\Pi_T)}\big).$$

б) Если также $\|\{\partial_t\mathbf{B}, \partial_t C\}\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leqslant N$ и $\mathbf{f}, \nabla\mathbf{f}, \partial_t\mathbf{f} \in L^{2,q}(\Pi_T)$ при некотором $1 \leqslant q \leqslant \infty$, то дополнительно существует $\partial_t^2\mathbf{w} \in L^{2,q}(\Pi_T)$ и

$$\|\partial_t^2\mathbf{w}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} \leqslant C_4(N,T)\big(\|\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W^{2,0}_{2,1}(\Pi_T)} + \|\{\mathbf{f}, \nabla\mathbf{f}, \partial_t\mathbf{f}\}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)}\big).$$

Задача Коши для параболической системы уравнений 2-го порядка — возмущения задачи Коши (1)

$$\mathcal{P}_\tau \mathbf{y} := \mathcal{H}\mathbf{y} - \tau\partial_i(A_{ij}\partial_j\mathbf{y}) = \mathbf{f}_\tau + \tau\partial_i\mathbf{g}_{i\tau} \text{ в } \Pi_T, \quad \mathbf{y}|_{t=0} = \mathbf{y}_{0\tau} \text{ в } \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{y}(x,t), \mathbf{f}_\tau(x,t), \mathbf{g}_{i\tau}(x,t)$: $\Pi_T \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}_{0\tau}(x)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — искомая и заданные вектор-функции, $0 < \tau \leqslant \bar{\tau}$ — малый параметр, $A_{ij} \in L^\infty(\Pi_T)$ — коэффициенты-матрицы порядка m, $i,j = \overline{1,n}$.
Пусть выполнено условие

$$\nu\|\nabla\mathbf{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} - \mu\|\mathbf{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant (A_{ij}\partial_j\mathbf{v}, \partial_i\mathbf{v})_{\mathbb{R}^n} \quad \forall\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^n) \quad (4)$$

п.в. в $(0,T)$ с некоторыми $\nu > 0$ и $\mu \geqslant 0$.
Оно шире, чем алгебраическое условие $\nu|\mathbf{w}|^2 \leqslant (A(x,t)\mathbf{w})\cdot\mathbf{w}$ для всех $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{mn}$ п.в. в Π_T с блочной матрицей $A := \{A_{ij}\}_{i,j=1}^n$.
Пусть выполнены условия

$$B_i, C, A_{ij} \in L^\infty(\Pi_T),\ i,j = \overline{1,n}, \quad \mathbf{f}_\tau \in L^{2,1}(\Pi_T), \quad \mathbf{y}_{0\tau} \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad (5)$$

и $\mathbf{g}_\tau := (\mathbf{g}_{1\tau}, \ldots, \mathbf{g}_{n\tau}) \in L^2(\Pi_T)$.

Слабым решением задачи Коши (3) назовем функцию $\mathbf{y} \in V_2(\Pi_T)$:

$$-(\mathbf{y}, \partial_t \boldsymbol{\varphi})_{\Pi_T} + (B_i \partial_i \mathbf{y} + C\mathbf{y}, \boldsymbol{\varphi})_{\Pi_T} + \tau(A_{ij}\partial_j \mathbf{y}, \partial_i \boldsymbol{\varphi})_{\Pi_T}$$
$$= \ell(\mathbf{y}_{0\tau}, \mathbf{f}_\tau; \boldsymbol{\varphi}) - \tau(\mathbf{g}_{i\tau}, \partial_i \boldsymbol{\varphi})_{\Pi_T} \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in H^1(\Pi_T), \boldsymbol{\varphi}|_{t=T} = 0.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия (4), (5), $\operatorname{div} \mathbf{B} \in L^\infty(\Pi_T)$, $0.5 \operatorname{div} \mathbf{B} - C \leqslant c_0 I_m$ п.в. в Π_T и $\mathbf{g}_\tau \in L^2(\Pi_T)$.
Тогда существует единственное слабое решение $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\tau$ задачи Коши (3), причем $\mathbf{y}_\tau \in C(0, T; L^2(\mathbb{R}^n))$ и верна его энергетическая оценка

$$\max\left\{\|\mathbf{y}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))}, \sqrt{\nu\tau}\|\nabla \mathbf{y}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)}\right\}$$
$$\leqslant e^{\bar{c}_0 T}\left(\|\mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\|\mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} + \sqrt{\nu^{-1}\tau}\|\mathbf{g}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)}\right),$$

где $\bar{c}_0 = c_0 + \bar{\tau}\mu$.

Задача Коши для гиперболической системы уравнений 2-го порядка — возмущения исходной системы (1)

$$\mathcal{H}_\tau \mathbf{y} := \tau\partial_t^2\mathbf{y} + \mathcal{H}\mathbf{y} - \tau\partial_i(A_{ij}\partial_j\mathbf{y}) = \mathbf{f}_\tau \ \text{ в } \ \Pi_T,$$
$$\mathbf{y}|_{t=0} = \mathbf{y}_{0\tau}, \quad \partial_t\mathbf{y}|_{t=0} = \mathbf{y}_{1\tau} \ \text{ в } \ \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

где $\mathbf{y}(x,t), \mathbf{f}_\tau(x,t)$: $\Pi_T \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}_{0\tau}(x), \mathbf{y}_{1\tau}(x)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — искомая и заданные функции.

Пусть выполнены условия (5) и $\mathbf{y}_{1\tau} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. *Слабым решением* задачи Коши (6) назовем функцию $\mathbf{y} \in W^{1,1}_{2,\infty}(\Pi_T)$:

$$-\tau(\partial_t\mathbf{y}, \partial_t\boldsymbol{\varphi})_{\Pi_T} + (\mathcal{H}\mathbf{y}, \boldsymbol{\varphi})_{\Pi_T} + \tau(A_{ij}\partial_j\mathbf{y}, \partial_i\boldsymbol{\varphi})_{\Pi_T} = \ell(\mathbf{y}_{1\tau}, \mathbf{f}_\tau; \boldsymbol{\varphi})$$

для любой $\boldsymbol{\varphi} \in W^{1,1}_{2,1}(\Pi_T)$, $\boldsymbol{\varphi}|_{t=T} = 0$, с $\mathbf{y}|_{t=0} = \mathbf{y}_{0\tau}$ в $C(0,T; L^2(\mathbb{R}^n))$.

Условие преобладания матрицы A старших коэфф. системы 2-го порядка над матрицей $\mathbf{B}$ старших коэфф. системы 1-го порядка

$$\|\mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqslant (1-\delta)^2\big[(A_{ij}\partial_j\mathbf{v},\partial_i\mathbf{v})_{\mathbb{R}^n} + \mu_1\|\mathbf{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\big] \quad \forall\mathbf{v}\in H^1(\mathbb{R}^n) \tag{7}$$

с некоторыми $0\leqslant\delta<1$, $\mu_1\geqslant 0$, где $\mathbf{B}\cdot\nabla\mathbf{v} := B_i\partial_i\mathbf{v}$.
Оно шире, чем более простое алгебраическое условие

$$|\mathbf{B}(x,t)\cdot\mathbf{w}|^2 \leqslant (1-\delta)^2(A_{ij}(x,t)\mathbf{w}_j)\cdot\mathbf{w}_i \ \forall\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_n\in\mathbb{R}^m \text{ п.в. в } \Pi_T,$$

с тем же δ и $\mathbf{B}\cdot\mathbf{w} := B_i\mathbf{w}_i$.
Введем также условие $A\leqslant c_A I_{mn}$ п.в. в Π_T, т.е.

$$(A(x,t)\mathbf{w})\cdot\mathbf{w}\leqslant c_A|\mathbf{w}|^2 \quad \forall\mathbf{w}\in\mathbb{R}^{mn} \quad \text{п.в. в} \quad \Pi_T$$

с некоторым $c_A>0$, например, $c_A = n\|A\|_{L^\infty(\Pi_T)}$, где $\|A\|_{L^\infty(\Pi_T)} := \max_{i,j=\overline{1,n}}\|A_{ij}\|_{L^\infty(\Pi_T)}$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (4), (5), (7), (12) и $\operatorname{div}\mathbf{B}, \partial_t A_{ij} \in L^\infty(\Pi_T)$, $A_{ij} = A^T_{ji}$, $i,j = \overline{1,n}$, $0.5\operatorname{div}\mathbf{B} - C \leqslant c_0 I_m$ п.в. в Π_T, $\mathbf{y}_{0\tau} \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{y}_{1\tau} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и $8\bar{\tau}^2\mu \leqslant 1$.
Тогда существует единственное слабое решение $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\tau$ задачи Коши (6) и верна оценка

$$\nu_0 \max\Big\{\|\mathbf{y}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))}, \tau\|\{\nabla\mathbf{y}_\tau, \partial_t\mathbf{y}_\tau\}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)},$$
$$\sqrt{\delta\tau}\|\{\partial_{\mathbf{t}}\mathbf{y}_\tau, \nabla\mathbf{y}_\tau\}\|_{\mathbf{L^2(\Pi_T)}}\Big\}$$
$$\leqslant e^{\bar{c}_1 T}\Big(\|\mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \tau\sqrt{\mathbf{2c_A}}\|\nabla\mathbf{y_{0\tau}}\|_{\mathbf{L^2(\mathbb{R}^n)}} + 2\tau\|\mathbf{y}_{1\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$+9\|\mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)}\Big),$$

где $\nu_0 = \min\{\sqrt{\nu/2}, \sqrt{1/6}\}$,
$\bar{c}_1 = \max\big\{4\big[c_0 + \bar{\tau}(\delta\mu + (1-\delta)\mu_1) + \sqrt{3/2}\|C\|_{L^\infty(\Pi_T)}\big], (2\nu)^{-1}c_{A1}\big\}$,
$c_{A1} \geqslant 0$ такова, что $\partial_t A \leqslant c_{A1} I_{mn}$ п.в. в Π_T (напр., $c_{A1} = n\|\partial_t A\|_{L^\infty(\Pi_T)}$)

Перейдем к оценкам разности решений задач Коши для системы уравнений 1-го порядка и ее возмущений 2-го порядка.

Теорема 4.

1. Пусть выполнены условия теоремы 1, пп. 1, 2 с $q = 1$ и теоремы 2 и $\|A\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leqslant N$.

Для разности $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{w} - \mathbf{y}_\tau$ решений задач Коши (1) и (3) верна оценка

$$\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau}\|\nabla \mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \leqslant C(N,T)\big[\|\mathbf{w}_0 - \mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
$$+\|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} + \sqrt{\tau}\big(\|\mathbf{g}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} + \|\mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W^{1,0}_{2,1}(\Pi_T)}\big)\big].$$

В частности, при $\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}$, $\mathbf{g}_\tau = 0$, $\mathbf{y}_{0\tau} = \mathbf{w}_0$ имеем

$$\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau}\|\nabla \mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)}$$
$$\leqslant C(N,T)\sqrt{\tau}\big(\|\mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W^{1,0}_{2,1}(\Pi_T)}\big),$$
$$\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} \leqslant C(N,T)\tau^{\alpha/2}\big(\|\mathbf{w}_0\|_{\mathcal{H}^\alpha} + \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{W}^{\alpha,0}_{2,1}}\big), \quad 0 < \alpha < 1. \quad (8)$$

Теорема 4 (продолжение).

2. Пусть выполнены также условия теоремы 1, п. 3а, $\|\operatorname{div} A_{\cdot j}\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leqslant N$, $j=\overline{1,n}$ для $\operatorname{div} A_{\cdot j} := \partial_i A_{ij}$ и снова $\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}$, $\mathbf{g}_\tau = 0$, $\mathbf{y}_{0\tau} = \mathbf{w}_0$. Для $\mathbf{r}_\tau$ верны также оценки

$$\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau}\|\nabla \mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \leqslant C(N,T)\tau\big(\|\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W^{2,0}_{2,1}(\Pi_T)}\big),$$

$$\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau}\|\nabla \mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)} \leqslant C(N,T)\tau^{\alpha/2}\big(\|\mathbf{w}_0\|_{\mathcal{H}^\alpha} + \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{W}^{\alpha,0}_{2,1}}\big), \quad 1<\alpha<2.$$

Постоянная $C(N,T)$ не зависит от τ.

Здесь стоят банаховы пространства, построенные с помощью $K_{\alpha,\infty}$-метода вещественной интерполяции банаховых пространств, $0<\alpha<1$

$$\mathcal{H}^\alpha := \big(L^2(\mathbb{R}^n), H^1(\mathbb{R}^n)\big)_{\alpha,\infty}, \ \mathcal{H}^{1+\alpha} := \big(H^1(\mathbb{R}^n), H^2(\mathbb{R}^n)\big)_{\alpha,\infty},$$

$$\mathcal{W}^{\alpha,0}_{2,1} := \big(L^{2,1}(\Pi_T), W^{1,0}_{2,1}(\Pi_T)\big)_{\alpha,\infty}, \ \mathcal{W}^{1+\alpha,0}_{2,1} := \big(W^{1,0}_{2,1}(\Pi_T), W^{2,0}_{2,1}(\Pi_T)\big)_{\alpha,\infty}.$$

Введем усреднение по Стеклову

$(\bar{\sigma}^{(\tau)}v)(x) := \dfrac{1}{\tau^n}\displaystyle\int_{(-\tau/2,\tau/2)^n} v(x+\xi)\,d\xi$ по x с шагом $\tau > 0$.

Теорема 5.

1. Пусть выполнены все условия теоремы 1 с $q = 1$ и теоремы 3, а также $\|A\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leqslant N$, $\|\operatorname{div} A_{\cdot j}\|_{L^\infty(\Pi_T)} \leqslant N$, $j = \overline{1,n}$. Для разности $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{w} - \mathbf{y}_\tau$ решений задач Коши (1) и (6) верна оценка

$$\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \tau\|\{\nabla\mathbf{r}_\tau, \partial_t\mathbf{r}_\tau\}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} + \sqrt{\delta\tau}\|\{\nabla\mathbf{r}_\tau, \partial_t\mathbf{r}_\tau\}\|_{L^2(\Pi_T)}$$
$$\leqslant C(N,T)\big[\|\mathbf{w}_0 - \mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)}$$
$$+\tau\big(\|\nabla\mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{y}_{1\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W^{2,1}_{2,1}(\Pi_T)}\big)\big].$$

Теорема 5 (продолжение). 2. При $\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}$, $\mathbf{y}_{1\tau} = 0$ и $\mathbf{y}_{0\tau} = \mathbf{w}_0$ либо $\mathbf{y}_{0\tau} = \bar{\sigma}^{(\tau)}\mathbf{w}_0$ верны соответственно оценки

$$\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \tau\|\{\nabla\mathbf{r}_\tau, \partial_t\mathbf{r}_\tau\}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} + \sqrt{\delta\tau}\|\{\nabla\mathbf{r}_\tau, \partial_t\mathbf{r}_\tau\}\|_{L^2(\Pi_T)}$$
$$\leqslant C_2(N,T)\tau\big(\|\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\mathbf{f}\|_{W^{2,1}_{2,1}(\Pi_T)}\big),$$
$$\|\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} \leqslant C(N,T)\tau^{\alpha/2}\big(\|\mathbf{w}_0\|_{\mathcal{H}^\alpha} + \|\mathbf{f}\|_{\mathcal{W}^{\alpha,\alpha/2}_{2,1}}\big), 0 < \alpha \leqslant 2. \quad (9)$$

Здесь стоят $\mathcal{W}^{2\alpha,\alpha}_{2,1} := \big(L^{2,1}(\Pi_T), W^{2,1}_{2,1}(\Pi_T)\big)_{\alpha,\infty}$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

Верны свойства:

$\mathcal{H}^\alpha = H^\alpha_2(\mathbb{R}^n)$ (пространство Никольского) при $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$.

$H^{\alpha,0}_{2,1}(\Pi_T) \subset \mathcal{W}^{\alpha,0}_{2,1}$, $H^{\alpha,\alpha/2}_{2,1}(\Pi_T) \subset \mathcal{W}^{\alpha,\alpha/2}_{2,1}$, $0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$.

$WH^{1,1/2}_{2,1}(\Pi_T) := \{v \in H^{0,1/2}_{2,1}(\Pi_T), \nabla v \in L^{2,1}(\Pi_T)\} \subset \mathcal{W}^{1,1/2}_{2,1}$ ($\sim \alpha = 1$).

$BV(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \subset H^{1/2}_2(\mathbb{R}^n)$, $BV(\Pi_T) \cap L^\infty(\Pi_T) \subset H^{1/2,1/4}_{2,1}(\Pi_T)$.

$\Rightarrow O(\tau^{1/4})$ в (8) и (9) при $\alpha = 1/2$ для широкого класса разрывных функций $\mathbf{w}_0$ и $\mathbf{f}$.

Пусть $\mathbf{B}, C, A \in L^\infty(0,T)$ не зависят от x и $-C \leqslant c_0 I_m$ п.в. на $(0,T)$. Пусть $\partial^{\mathbf{k}} = \partial_1^{k_1} \ldots \partial_n^{k_n}$ — производная по Соболеву, $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$.

Теорема 6. Пусть $\mathbf{k}$ порядка $|\mathbf{k}|_1 := k_1 + \ldots + k_n \geqslant 1$ и $1 \leqslant q \leqslant \infty$ — любые.

1. а) Пусть $\mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{w}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда для слабого решения $\mathbf{w}$ задачи Коши (1) верна оценка

$$\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} \leqslant e^{c_0 T} \big(\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} \big). \qquad (10)$$

Подробнее говоря, оценка (10) означает, что если $\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T)$, то существует $\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w} \in L^{2,\infty}(\Pi_T)$ и верна эта оценка.

б) Пусть $m_0 = 1, 2$. Если $\mathbf{f}, \nabla^{m_0} \mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{w}_0 \in H^{m_0}(\mathbb{R}^n)$, то для сильного решения $\mathbf{w}$ задачи Коши (1) верны оценки

$$\|\partial^{\mathbf{k}} \nabla^{m_0} \mathbf{w}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)} \leqslant c e^{c_0 T} \big(\|\partial^{\mathbf{k}} \nabla^{m_0} \mathbf{w}_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}} \nabla^{m_0} \mathbf{f}\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} \big).$$

Теорема 6 (продолжение).

Если также $\|\{\mathbf{B}, C\}\|_{L^\infty(0,T)} \leqslant N$, то при $m_0 = 1, 2$ соответственно верны оценки

$$\|\partial_t \partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)}$$
$$\leqslant cNe^{c_0 T} T^{1/q} \big(\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}\|_{W^{1,0}_{2,1}(\Pi_T)} \big) + \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)},$$
$$\|\partial_t \nabla \partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)}$$
$$\leqslant cNe^{c_0 T} T^{1/q} \big(\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}\|_{W^{2,0}_{2,1}(\Pi_T)} \big) + \|\partial^{\mathbf{k}} \nabla \mathbf{f}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)}.$$

Если $m_0 = 2$ и также $\|\{\partial_t \mathbf{B}, \partial_t C\}\|_{L^\infty(0,T)} \leqslant N$, $\partial_t \mathbf{f} \in L^{2,1}(\Pi_T)$, то верна оценка

$$\|\partial_t^2 \partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)} \leqslant cN^2 e^{c_0 T} T^{1/q} \big(\|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}} \mathbf{f}\|_{W^{2,0}_{2,1}(\Pi_T)} \big)$$
$$+ cN \|\partial^{\mathbf{k}} \{\mathbf{f}, \nabla \mathbf{f}, \partial_t \mathbf{f}\}\|_{L^{2,q}(\Pi_T)}.$$

Теорема 6 (продолжение).

2. Пусть выполнены условия (4) с $\mu = 0$, $\mathbf{f}_\tau \in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{g}_\tau \in L^2(\Pi_T)$, $\mathbf{y}_{0\tau} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Тогда для слабого решения $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\tau$ задачи Коши (3) верна оценка

$$\max\left\{\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{y}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))}, \sqrt{\nu\tau}\|\nabla\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{y}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)}\right\}$$
$$\leqslant e^{c_0 T}\left(\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)} + \sqrt{\nu^{-1}\tau}\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{g}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)}\right).$$

3. Пусть выполнены условия (4) с $\mu = 0$, (7) с $\mu_1 = 0$, (12) и $\partial_t A_{ij} \in L^\infty(0,T)$, $A_{ij} = A_{ji}^T$, $i,j = \overline{1,n}$, а также $\mathbf{f}_\tau \in L^{2,1}(\Pi_T)$, $\mathbf{y}_{0\tau} \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $\mathbf{y}_{1\tau} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Тогда для слабого решения $\mathbf{y} = \mathbf{y}_\tau$ задачи Коши (6) верна оценка

$$\nu_1 \max\left\{\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{y}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))}, \tau\|\partial^{\mathbf{k}}\{\nabla\mathbf{y}_\tau, \partial_t\mathbf{y}_\tau\}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)},\right.$$
$$\left.\sqrt{\delta\tau}\|\partial^{\mathbf{k}}\{\partial_t\mathbf{y}_\tau, \nabla\mathbf{y}_\tau\}\|_{L^2(\Pi_T)}\right\} \leqslant e^{c_1 T}\left(\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right.$$
$$\left.+\tau\sqrt{2c_A}\|\nabla\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{y}_{0\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\tau\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{y}_{1\tau}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\sqrt{2}\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}_\tau\|_{L^{2,1}(\Pi_T)}\right),$$

с $\nu_1 = \min\{\sqrt{2\nu}, 1/\sqrt{2}\}$, $c_1 = \max\left\{2\big(c_0 + \sqrt{2}\|C\|_{L^\infty(0,T)}\big), (2\nu)^{-1}c_{A1}\right\}$, $c_{A1} \geqslant 0$ прежнее.

Оценки последней теоремы верны и при $|\mathbf{k}|_1 = 0$, когда $\partial^{\mathbf{k}} v = v$.

Оценки производных разностей решений систем.
При $|\mathbf{k}|_1 = 0$ это прежние оценки, но с уточненными постоянными.

Теорема 7. Пусть выполнены условия теоремы 6, пп. 1, 2, кроме условий на $\partial_t \mathbf{f}$ и $\partial_t \mathbf{B}, \partial_t C$, и $\|A\|_{L^\infty(0,T)} \leqslant N$. Пусть для краткости $\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}$, $\mathbf{g}_\tau = 0$, $\mathbf{y}_{0\tau} = \mathbf{w}_0$ и $|\mathbf{k}|_1 \geqslant 0$.
Тогда для разности $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{w} - \mathbf{y}_\tau$ решений задач Коши (1) и (3) верны оценки

$$\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau}\|\nabla\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)}$$
$$\leqslant \mathbf{cNe^{2c_0T}}\sqrt{\mathbf{T}\tau}\big(\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}\|_{W^{1,0}_{2,1}(\Pi_T)}\big),$$

$$\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \sqrt{\tau}\|\nabla\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)}$$
$$\leqslant \mathbf{cNe^{2c_0T}T}\tau\big(\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}\|_{W^{2,0}_{2,1}(\Pi_T)}\big),$$

Теорема 7 (продолжение).

$$\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))}$$
$$\leqslant cN^\alpha e^{(1+\alpha)c_0T}(T\tau)^{\alpha/2}\big(\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w}_0\|_{\mathcal{H}^\alpha}+\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}\|_{\mathcal{W}^{\alpha,0}_{2,1}}\big),\ 0<\alpha<1,$$
$$\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))}+\sqrt{\tau}\|\nabla\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\|_{L^2(\Pi_T)}$$
$$\leqslant cNe^{2c_0T}(T\tau)^{\alpha/2}\big(\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w}_0\|_{\mathcal{H}^\alpha}+\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}\|_{\mathcal{W}^{\alpha,0}_{2,1}}\big),\ 1<\alpha<2.$$

Теорема 8. Пусть выполнены все условия теоремы 6, п. 1 с $q = 1$ и п. 3, а также $\|A\|_{L^\infty(0,T)} \leqslant N$. Пусть $\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}$, $\mathbf{y}_{1\tau} = 0$ и $|\mathbf{k}|_1 \geqslant 0$. Тогда для разности $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{w} - \mathbf{y}_\tau$ решений задач Коши (1) и (6) при $\mathbf{y}_{0\tau} = \mathbf{w}_0$ либо $\mathbf{y}_{0\tau} = \bar{\sigma}^{(\tau)}\mathbf{w}_0$ верны соответственно оценки

$$\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} + \tau\|\{\nabla\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau, \partial_t\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\}\|_{L^{2,\infty}(\Pi_T)}$$
$$+\sqrt{\delta\tau}\|\{\nabla\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau, \partial_t\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\}\|_{L^2(\Pi_T)} \leqslant$$
$$\leqslant cN^2 e^{(c_0+c_1)T}(T+1)\tau\big(\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} + \|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}\|_{W^{2,1}_{2,1}(\Pi_T)}\big),$$

$$\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{r}_\tau\|_{C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))}$$
$$\leqslant cN^\alpha e^{(\alpha c_0/2+c_1)T}[(T+1)\tau]^{\alpha/2}\big(\|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{w}_0\|_{\mathcal{H}^\alpha} + \|\partial^{\mathbf{k}}\mathbf{f}\|_{\mathcal{W}^{\alpha,\alpha/2}_{2,1}}\big), \quad 0 < \alpha \leqslant 2.$$

Каждую из оценок в теоремах 6–8 можно просуммировать по всем $\mathbf{k}$ с $|\mathbf{k}|_1 = p$, что приводит к оценкам с заменой $\partial^{\mathbf{k}}$ на ∇^p с любым $p \geqslant 1$. Из таких оценок $\mathbf{r}_\tau$ при $p > n/2$ в силу теоремы вложения следуют оценки в норме $\sup_{\bar{\Pi}_T} |\mathbf{r}_\tau(x,t)|$.

Рассмотрим линеаризованные на постоянном решении КГД системы уравнений относительно нормированного (безразмерного) вектора малых возмущений $\tilde{\mathbf{z}}(x,t) := (\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\varepsilon})(x,t)$ плотности, скорости и удельной внутренней энергии газа, где $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n)$, $n = 1, 2, 3$.
Это системы дифференциальных уравнений $\ell + 1$-го порядка по t и 2–го порядка по x с постоянными коэффициентами, где $\ell = 0$ для параболической и $\ell = 1$ для гиперболической КГД систем.
В симметризованной матричной форме задача Коши для них такова

$$\ell\tau\partial_t^2\tilde{\mathbf{z}} + \partial_t\tilde{\mathbf{z}} + c_* B^{(i)}\partial_i\tilde{\mathbf{z}} - \tau c_*^2 A^{(ij)}\partial_i\partial_j\tilde{\mathbf{z}} = \mathbf{f}_\tau \quad \text{в} \quad \Pi_T, \tag{11}$$

$$\tilde{\mathbf{z}}|_{t=0} = \tilde{\mathbf{z}}_{0\tau}, \quad \partial_t\tilde{\mathbf{z}}|_{t=0} = \tilde{\mathbf{z}}_{1\tau} \quad (\text{при} \quad \ell = 1) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n, \tag{12}$$

где $B^{(i)}$ и $A^{(ij)}$ — постоянные симметричные матрицы конвективных и вязких (регуляризующих) слагаемых порядка $m = n + 2$, $A^{(ij)} = A^{(ji)}$, $c_* > 0$ — фоновая скорость звука, $\tau > 0$ — параметр релаксации.
Свободный член $\mathbf{f}_\tau$ дописан формально для общности анализа.
При $\tau = 0$ получаем задачу Коши для линеаризованной системы уравнений газовой динамики 1-го порядка

$$\partial_t\mathbf{w} + c_* B^{(i)}\partial_i\mathbf{w} = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad \Pi_T, \quad \mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{w}_0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Для $\tilde{\mathbf{z}} = (\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\varepsilon}), \mathbf{z} = (\rho, \mathbf{u}, \varepsilon) \in H^1(\mathbb{R}^n)$ введем билинейную форму

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) = \frac{1}{\gamma}(\nabla\tilde{\rho}, \nabla\rho)_{\mathbb{R}^n} + (\mathbf{M}\nabla\tilde{\rho}, \mathbf{M}\nabla\rho)_{\mathbb{R}^n}$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\gamma}}((\mathbf{M}\nabla)\tilde{\mathbf{u}}, \nabla\rho)_{\mathbb{R}^n} + \frac{1}{\sqrt{\gamma\gamma_*}}(\nabla\tilde{\varepsilon}, \nabla\rho)_{\mathbb{R}^n}$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\gamma}}(\mathbf{M}\nabla\tilde{\rho}, \operatorname{div}\mathbf{u})_{\mathbb{R}^n} + \widehat{\alpha}_s(\nabla\tilde{\mathbf{u}}, \nabla\mathbf{u})_{\mathbb{R}^n} + (\widehat{a}_0 + 1)(\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}}, \operatorname{div}\mathbf{u})_{\mathbb{R}^n}$$

$$+((\mathbf{M}\nabla)\tilde{\mathbf{u}}, (\mathbf{M}\nabla)\mathbf{u})_{\mathbb{R}^n} + \frac{2}{\sqrt{\gamma_*}}(\mathbf{M}\nabla\tilde{\varepsilon}, \operatorname{div}\mathbf{u})_{\mathbb{R}^n} + \frac{1}{\sqrt{\gamma\gamma_*}}(\nabla\tilde{\rho}, \nabla\varepsilon)_{\mathbb{R}^n}$$

$$+\frac{2}{\sqrt{\gamma_*}}((\mathbf{M}\nabla)\tilde{\mathbf{u}}, \nabla\varepsilon)_{\mathbb{R}^n} + \left(\widehat{\alpha}_P + \frac{1}{\gamma_*}\right)(\nabla\tilde{\varepsilon}, \nabla\varepsilon)_{\mathbb{R}^n} + (\mathbf{M}\nabla\tilde{\varepsilon}, \mathbf{M}\nabla\varepsilon)_{\mathbb{R}^n}.$$

Здесь $\mathbf{M} = (M_1, \ldots, M_n)$ — нормированная на c_* фоновая скорость ($M = |\mathbf{M}|$ — фоновое число Маха), $\mathbf{M}\nabla = \mathbf{M} \cdot \nabla$, $\gamma_* = \dfrac{\gamma}{\gamma - 1}$, $\widehat{a}_0 = \frac{1}{3}\widehat{\alpha}_s + \widehat{\alpha}_{1s} \geqslant 0$, $\gamma > 1$ — показатель адиабаты, $\widehat{\alpha}_s \geqslant 0$, $\widehat{\alpha}_{1s} \geqslant 0$, $\widehat{\alpha}_P \geqslant 0$ — постоянные КГД-параметры в искусственных коэффициентах вязкости и теплопроводности. Формально эта форма получается умножением $-A^{(ij)}\partial_i\partial_j\tilde{\mathbf{z}}$ на $\mathbf{z}$, интегрированием по $\mathbb{R}^n$ и по частям.

Пусть $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{z} = B^{(i)} \partial_i \mathbf{z}$.

Лемма

Верны свойства симметричности $\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) = \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{z}})$ *и неотрицательной определенности*

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \widehat{\alpha}_s \|\nabla \mathbf{u}\|^2_{\mathbb{R}^n} + \widehat{a}_0 \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2_{\mathbb{R}^n} + \widehat{\alpha}_P \|\nabla \varepsilon\|^2_{\mathbb{R}^n} + \|\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{z}\|^2_{\mathbb{R}^n}$$
$$\geqslant \|\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{z}\|^2_{\mathbb{R}^n},$$
$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{z}, \mathbf{z}) \geqslant \max\left\{\delta_0 \|\nabla \rho\|^2_{\mathbb{R}^n}, \widehat{\alpha}_s \|\nabla \mathbf{u}\|^2_{\mathbb{R}^n} + \widehat{a}_0 \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|^2_{\mathbb{R}^n} + \widehat{\alpha}_P \|\nabla \varepsilon\|^2_{\mathbb{R}^n}\right\}$$
$$\geqslant \delta_1 \|\nabla \mathbf{z}\|^2_{\mathbb{R}^n} \ \forall \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z} \in H^1(\mathbb{R}^n)$$

с $\delta_0 := \dfrac{1}{3\gamma} \min\left\{1, \dfrac{\widehat{\alpha}_s}{M^2}, \gamma_* \widehat{\alpha}_P\right\}$, $\delta_1 := \dfrac{1}{2} \min\{\delta_0, \widehat{\alpha}_s, \widehat{\alpha}_P\}$.

В силу леммы все предыдущие теоремы применимы к задачам Коши для системы газовой динамики (13) и КГД систем (11), (12). $\Rightarrow$

Теорема 9. 1. Для задачи Коши для линеаризованной системы уравнений газовой динамики (13) верны теоремы 1 и 6, п. 1 с $c_0 = 0$.

2. Пусть $\widehat{\alpha}_s > 0$, $\widehat{\alpha}_P > 0$. Для задач Коши для линеаризованных КГД систем (11), (12) верны свойства (4) с $\nu = c_*^2 \delta_1$, $\mu = 0$ и (5) с $\delta = \mu_1 = 0$,
и поэтому верны теоремы 2 и 6, п. 2 с $\bar{c}_0 = c_0 = 0$ при $\ell = 0$
либо теоремы 3 и 6, п. 3 с $\bar{c}_1 = c_1 = 0$ при $\ell = 1$.

Для разности $\mathbf{r}_\tau = \mathbf{w} - \tilde{\mathbf{z}}$ решений задач Коши для линеаризованных системы уравнений газовой динамики (13) и КГД систем (11), (12) верны оценки теорем 4 и 7 с $c_0 = 0$ при $\ell = 0$
либо теорем 5 и 8 с $c_0 = c_1 = 0$ при $\ell = 1$.

Равенства $c_k = 0$, $\bar{c}_k = 0$ важны и означают ограниченность или степенной (вместо экспоненциального) рост по T постоянных в соответствующих оценках.

Результаты вскоре будут опубликованы в статье:

Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. О параболическом и гиперболическом 2-го порядка возмущениях симметричной гиперболической системы 1-го порядка // Доклады РАН. Матем., информ., процессы управл. 2022. Т. 506. № 1 (в печати).

Работа выполнена при поддержке РНФ, проект 22-11-00126.