О свойствах агрегированной квазигазодинамической системы уравнений гомогенной газовой смеси

А.С. Федченко, А.А. Злотник

НИУ Высшая школа экономики

Пущино, Всероссийская научная конференция "Теоретические основы конструирования численных алгоритмови решение задач матфизики", посвященная памяти К.И. Бабенко, 25 августа 2022

1. Введение
2. Задачи исследования
3. КГД система уравнений многомпонентной газовой смеси
   - КГД система при наличии потоков диффузии
   - Уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии
4. Исследование свойств линеаризованной КГД системы
   - Линеаризация редуцированной КГД системы
   - Диссипативность симметризованной линеаризованной КГД системы уравнений
5. Анализ параболичности и локальной по времени классической однозначной разрешимости задачи Коши для КГД системы
6. Результаты
   - Публикации

Введение

Уравнения движения смесей вязкого сжимаемого газа даны, в частности, в [LL86] ,[N87],[TP89],[G99]. Регуляризованные, или квазигазодинамические (КГД), системы уравнений однокомпонентного газа представлены [Ch04],[E07],[Sh09]. Они широко используются в компьютерном моделировании разнообразных задач газовой динамики. Их важные математические свойства, аналогичные рассмотренным в доладе, доказаны в [Sh09],[ZCh08],[Z10],[Z10B].

LL86 – *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика, изд. 3-е. М.: Наука, 1986.
N87– *Р.И. Нигматулин.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987.
TP89– *Н.Н. Пилюгин, Г.А. Тирский.* Динамика ионизированного излучающего газа. М.: Изд-во Московского ун-та, 1989.
G99– *V. Giovangigli.* Multicomponent flow modeling. Boston, Birkhäuser, 1999.
ZCh08–*А.А. Злотник, Б.Н. Четверушкин.* О параболичности квазигазодинамической системы уравнений, ее гиперболической 2-го порядка модификации и устойчивости малых возмущений для них // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 3. С. 445–472.
Z10B– *А.А. Злотник.* Линеаризованная устойчивость равновесных решений квазигазодинамической системы уравнений // Докл. АН. 2010. Т. 433. № 6. С. 599-603.

КГД системы уравнений бинарных смесей, в том числе гомогенных (с общей скоростью и температурой компонент), получены и апробированы в том числе в [E07],[EZCh14],[EZSh19].

E07– *Т.Г. Елизарова.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
EZCh14–*Т.Г. Елизарова, А.А. Злотник, Б.Н. Четверушкин.* О квазигазо- и гидродинамических уравнениях бинарных смесей газов // Докл. РАН. 2014. Т. 459. № 4. С. 395–399.
EZSh19–*Т.Г. Елизарова, А.А. Злотник, Е.В. Шильников.* Регуляризованные уравнения для численного моделирования течений гомогенных бинарных смесей вязких сжимаемых газов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 11. С. 1899–1914.

Задачи исследования

- Получить уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии при наличии потоков диффузии
- Построить линеаризованную квазигазодинамическую систему уравнений гомогенной газовой смеси
- Вывести существование, единственность и L^2 дисссипативность слабых решений начально-краевой задачи для линеаризованной системы
- Исследовать исходную систему на сильную параболичность и локальную по времени классическую однозначную разрешимость задачи Коши.

Квазигазодинамическая (КГД) система уравнений

для гомогенной многокомпонентной смеси при наличии потоков диффузии между компонентами: уравнения баланса массы компонент смеси, баланса импульса и суммарной полной энергии смеси:

$$\partial_t \rho_\alpha + \operatorname{div}\left[\rho_\alpha(\mathbf{u}-\mathbf{w}_\alpha)+\mathbf{d}_\alpha\right]=0, \quad \alpha=\overline{1,K},$$

$$\partial_t(\rho\mathbf{u}) + \operatorname{div}\left[\rho(\mathbf{u}-\mathbf{w})\otimes\mathbf{u}\right] + \nabla p = \operatorname{div}\Pi + [\rho - \tau\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})]\mathbf{f},$$

$$\partial_t E + \operatorname{div}\left[\tfrac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2(\mathbf{u}-\mathbf{w}) + \langle\rho_\alpha h_\alpha(\mathbf{u}-\mathbf{w}_\alpha)\rangle\right] =$$
$$= \operatorname{div}(-\mathbf{q}+\Pi\mathbf{u}) + \rho(\mathbf{u}-\mathbf{w})\cdot\mathbf{f} + Q.$$

$\rho_1>0,\ldots,\rho_K>0$ — плотности компонент смеси, $\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_n)$, $\theta>0$ — общие скорость и абсолютная температура смеси

Потоки диффузии вводится формулой

$$-\mathbf{d}_\alpha := d_0\Big[\sum_{\beta:\,\beta\neq\alpha}\nabla(G_\alpha-G_\beta)+b_\alpha\nabla\theta\Big] = d_0\big(K\nabla\overline{G}_\alpha+b_\alpha\nabla\theta\big), \quad \alpha=\overline{1,K},$$

$$\mathbf{q}^d = \big\langle\big(G_\alpha+K^{-1}b_\alpha\theta\big)\mathbf{d}_\alpha\big\rangle, \text{где } \ G_\alpha=\varepsilon_\alpha - s_\alpha\theta + \frac{p_\alpha}{\rho_\alpha} = (c_{p\alpha}-s_\alpha)\theta -$$

— потенциал Гиббса и $s_\alpha = s_{\alpha 0} - R_\alpha\ln\rho_\alpha + c_{V\alpha}\ln\theta$ — удельная энтропия компоненты α, с $s_{\alpha 0}=\mathrm{const}$.

Уравнения состояния и регуляризующие скорости

$$p_\alpha = (\gamma_\alpha - 1)\rho_\alpha\varepsilon_\alpha = R_\alpha\rho_\alpha\theta, \quad \varepsilon_\alpha = c_{V\alpha}\theta, \quad \alpha = \overline{1, K},$$

$$\rho = \langle\rho_\alpha\rangle := \rho_1 + \ldots + \rho_K, \quad p = \langle p_\alpha\rangle = R\rho\theta,$$

$$\varepsilon = \langle c_\alpha\varepsilon_\alpha\rangle = c_V\theta, E = \tfrac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho\varepsilon,$$

$$\mathbf{w}_\alpha = \frac{\tau}{\rho_\alpha}[\operatorname{div}(\rho_\alpha\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla p_\alpha - \rho_\alpha\mathbf{f}], \quad \widehat{\mathbf{w}}_\alpha = \tau\Big[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho_\alpha}\nabla p_\alpha - \mathbf{f}\Big],$$

$$\mathbf{w} := \langle c_\alpha\mathbf{w}_\alpha\rangle = \frac{\tau}{\rho}[\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla p - \rho\mathbf{f}],$$

$$\widehat{\mathbf{w}} = \langle c_\alpha\widehat{\mathbf{w}}_\alpha\rangle = \tau\Big[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \mathbf{f}\Big],$$

Тензор вязкости $\Pi = \Pi^{NS} + \Pi^\tau$, поток тепла $\mathbf{q} = \mathbf{q}^F + \mathbf{q}^d + \mathbf{q}^\tau$

$$\Pi^{NS} = \mu\big[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T - \tfrac{2}{3}(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbb{I}\big] + \lambda(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbb{I}, \quad -\mathbf{q}^F = \varkappa\nabla\theta,$$

$$\Pi^\tau = \rho\mathbf{u}\otimes\widehat{\mathbf{w}} + \tau\big[\mathbf{u}\cdot\nabla p + \langle\gamma_\alpha p_\alpha\rangle\operatorname{div}\mathbf{u} - \langle(\gamma_\alpha - 1)Q_\alpha\rangle\big]\mathbb{I},$$

$$-\mathbf{q}^\tau = \tau\big\{\big[c_V\rho\nabla\theta - \theta\nabla(R\rho)\big]\cdot\mathbf{u} - \langle Q_\alpha\rangle\big]\big\}\mathbf{u}, \mathbf{q}^d = \big\langle\big(G_\alpha + K^{-1}b_\alpha\theta\big)\mathbf{d}_\alpha\big\rangle,$$

$\tau = \tau(\rho, \mathbf{u}, \theta) > 0$ — параметр регуляризации (релаксации)

$\mathbf{f}$ — плотность массовых сил, Q_α – мощности тепловых источников.

Вид потоков диффузии для бинарной смеси

При $K = 2$ формулы для потоков принимают вид, эквивалентный указанному в [гл. VI,LL86]

$$-\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 = d_0\big[\nabla(G_1 - G_2) + b_1\nabla\theta\big], \quad \mathbf{q}^d = (G_1 - G_2 + b_1\theta)\mathbf{d}_1,$$

также они могут быть преобразованы к более стандартному для бинарных смесей виду

$$-\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 = d_0\Big[\frac{R_1R_2\theta}{Rc_1(1-c_1)}\nabla c_1 - \frac{R_1 - R_2}{R\rho}\nabla p + \tilde{b}_1\nabla\theta\Big], \quad \mathbf{q}^d = \big(c_{p1} - c_{p2}$$

где $c_\alpha = \rho_\alpha/\rho, \alpha = \overline{1, K}$ - относительные концентрации компонент смеси. В частном случае $\tilde{b}_1 = 0$ (т.е. в отсутствие термодиффузии) их вид упрощается.

[гл. VI,LL86] – *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика, изд. 3-е. М.: Наука, 1986.

КГД уравнения = уравнения Навье-Стокса сжимаемого газа
+ $\tau\cdot$ "диссипативные" слагаемые
(важно и для анализа уравнений, и для их дискретизации)

На практике используются как физические, так и искусственные коэффициенты вязкости и теплопроводности, а также их суммы.

Как можно понимать "диссипативность" строго математически?

Математически **диссипативность** — это:

1. выполнение уравнения баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии (*диссипативность по энтропии*)
2. параболичность по Петровскому КГД системы
3. диссипативность линеаризованной КГД системы уравнений

Теорема

Пусть $S := \langle c_\alpha s_\alpha \rangle$ *- суммарная удельная энтропия,* $d_0 > 0$. *Верно следующее регуляризованное уравнение баланса энтропии гомогенной многокомпонентной смеси при наличии потоков диффузии*

$$\partial_t(\rho S) + \operatorname{div}\Big[\langle \rho_\alpha s_\alpha(\mathbf{u} - \mathbf{w}_\alpha)\rangle + \frac{1}{K}\langle b_\alpha \mathbf{d}_\alpha\rangle + \frac{1}{\theta}(\mathbf{q}^F + \mathbf{q}^\tau)\Big] = \mathcal{P}^{NS} + \langle \mathcal{P}^\tau_\alpha\rangle$$

с производством энтропии $\mathcal{P}^{NS} + \langle \mathcal{P}^\tau_\alpha\rangle$, *где*

$$\mathcal{P}^{NS} = \frac{1}{\theta}\Big[\frac{\mu}{2}|\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T|^2 + \Big(\lambda - \frac{2}{3}\mu\Big)(\operatorname{div}\mathbf{u})^2\Big] + \frac{1}{\theta^2}\varkappa|\nabla\theta|^2 +$$
$$+\frac{1}{Kd_0\theta}\big\langle|\mathbf{d}_\alpha|^2\big\rangle \geqslant 0, \quad \mathcal{P}^\tau_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{\tau\theta}|\widehat{\mathbf{w}}_\alpha|^2 + \tau\frac{R_\alpha}{\rho_\alpha}\big[\operatorname{div}(\rho_\alpha\mathbf{u})\big]^2 +$$
$$+\tau c_{V\alpha}\rho_\alpha\Big[\mathbf{u}\cdot\nabla\ln\theta - \frac{(\gamma_\alpha - 1)Q_\alpha}{2p_\alpha}\Big]^2 + \frac{Q_\alpha}{\theta}\Big(1 - \frac{\tau(\gamma_\alpha - 1)Q_\alpha}{4p_\alpha}\Big),$$

где $\mathcal{P}^\tau_\alpha \geqslant 0$ *при условии* $\tau(\gamma_\alpha - 1)Q_\alpha \leqslant 4p_\alpha$, $\alpha = \overline{1, K}$.

Вспомогательная редукция уравнений с точностью до $O(|\nabla \mathbf{z}|^2)$

$$\partial_t \rho_\alpha + \nabla \rho_\alpha \cdot \mathbf{u} + \rho_\alpha \operatorname{div} \mathbf{u} =$$

$$= \tau \big[R_\alpha \theta \Delta \rho_\alpha + [\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla] \rho_\alpha + 2\rho_\alpha (\mathbf{u} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{u} + R_\alpha \rho_\alpha \Delta \theta \big] + O(|\nabla \mathbf{z}|^2)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + \frac{\theta}{\rho} \langle R_\alpha \nabla \rho_\alpha \rangle + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + R \nabla \theta$$

$$= 2\tau \frac{\theta}{\rho} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \langle R_\alpha \nabla \rho_\alpha \rangle + + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u} + \frac{\chi}{\rho} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \tau \frac{\langle \gamma_\alpha p_\alpha \rangle}{\rho} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} +$$

$$+ \tau [\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla] \mathbf{u} + 2\tau R (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \theta + O(|\nabla \mathbf{z}|^2),$$

$$\partial_t \theta + \frac{R}{c_V} \theta \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \tau \frac{\theta^2}{c_V \rho} \langle R_\alpha^2 \Delta \rho_\alpha \rangle +$$

$$+ 2\tau \frac{R\theta}{c_V} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{u} + \tau [\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla] \theta + \frac{\varkappa}{c_V \rho} \Delta \theta + \tau \frac{\langle R_\alpha p_\alpha \rangle}{c_V \rho} \Delta \theta + O(|\nabla \mathbf{z}|^2)$$

где $\Delta = \operatorname{div} \nabla$ — оператор Лапласа, $\chi := \frac{1}{3}\mu + \lambda$. Эта система уравнений удобна ниже как для линеаризации исходной КГД системы, так и при анализе ее параболичности.

Линеаризация КГД системы уравнений гомогенной газовой многокомпонентной смеси

При $\mathbf{f} = 0$, $Q_1 = \ldots, Q_K = 0$ КГД система уравнений имеет постоянные решения $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, \theta)(x,t) \equiv \mathbf{z}_0 = (\rho_{10}, \ldots, \rho_{K0}, \mathbf{u}_0, \theta_0)$ с $\rho_{10} > 0, \ldots, \rho_{K0} > 0$, $\theta_0 > 0$. Положим $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + D_* \widetilde{\mathbf{z}}$, где $D_* := \mathrm{diag}\{\rho_{1*}, \ldots, \rho_{K*}, u_*, \ldots, u_*, \theta_*\}$ — диагональная матрица порядка $K + n + 1$ положительных обезразмеривающих параметров, выбираемых ниже, а $\widetilde{\mathbf{z}} := (\widetilde{\boldsymbol{\rho}}, \widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{\theta})$ — вектор безразмерных возмущений, с $\widetilde{\boldsymbol{\rho}} := (\widetilde{\rho}_1, \ldots, \widetilde{\rho}_K)$ и $\widetilde{\mathbf{u}} := (\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_n)$.

Линеаризуем КГД систему на таком фоновом решении $\mathbf{z}_0$. Введем фоновые нормированное решение $(\widehat{\rho}_{10}, \ldots, \widehat{\rho}_{K0}, \widehat{\mathbf{u}}_0, \widehat{\theta}_0) := D_*^{-1} \mathbf{z}_0$ с $\widehat{\mathbf{u}}_0 = (\widehat{u}_{10}, \ldots, \widehat{u}_{n0})$ и значения ρ, c_α, R и c_V, а также фоновые средние значения $R_\alpha \gamma_\alpha$ и R_α^2

$$\rho_0 := \langle \rho_{\alpha 0} \rangle, \ c_{\alpha_0} := \frac{\rho_{\alpha 0}}{\rho_0}, \ R_0 := \langle c_{\alpha_0} R_\alpha \rangle,$$

$$c_{V0} := \langle c_{\alpha_0} c_{V\alpha} \rangle, \ (R\gamma)_0 = \langle c_{\alpha_0} R_\alpha \gamma_\alpha \rangle, \ (R^2)_0 = \langle c_{\alpha_0} R_\alpha^2 \rangle.$$

Линеаризация КГД системы уравнений гомогенной газовой многокомпонентной смеси

Подставим решение в форме $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + D_* \widetilde{\mathbf{z}}$ в исходную систему, отбрасим члены 2-го порядка малости относительно вектор-функции $\widetilde{\mathbf{z}}$ и ее производных 1-го и 2-го порядка получим линеаризованную систему уравнений.

Линеаризованная КГД система уравнений гомогенной газовой смеси

$$\partial_t \widetilde{\rho}_\alpha + u_* \big(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \widetilde{\rho}_\alpha + \widehat{\rho}_{\alpha 0} \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}}\big) =$$

$$= \tau_0 u_*^2 \Big[\frac{R_\alpha \theta_0}{u_*^2} \Delta \widetilde{\rho}_\alpha + (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)^2 \widetilde{\rho}_\alpha + 2\widehat{\rho}_{\alpha 0} (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}} + \frac{R_\alpha \widehat{\rho}_{\alpha 0} \theta_*}{u_*^2} \Delta \widetilde{\theta} \Big],$$

$$\alpha = \overline{1, K},$$

$$\partial_t \widetilde{\mathbf{u}} + u_* \Big(\frac{\theta_0}{\rho_0 u_*^2} \langle R_\alpha \rho_{\alpha *} \nabla \widetilde{\rho}_\alpha \rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{u}} + \frac{R_0 \theta_*}{u_*^2} \nabla \widetilde{\theta} \Big) =$$

$$= u_*^2 \Big[2\tau_0 \frac{\theta_0}{\rho_0 u_*^2} (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \langle R_\alpha \rho_{\alpha *} \nabla \widetilde{\rho}_\alpha \rangle + \frac{\mu_0}{\rho_0 u_*^2} \Delta \widetilde{\mathbf{u}} +$$

$$+ \Big(\frac{\chi_0}{\rho_0 u_*^2} + \tau_0 \frac{(R\gamma)_0 \theta_0}{u_*^2} \Big) \nabla \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}} + \tau_0 (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)^2 \widetilde{\mathbf{u}} + +2\tau_0 \frac{R_0 \theta_*}{u_*^2} (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \nabla \widetilde{\theta} \Big],$$

$$\partial_t \widetilde{\theta} + u_* \Big(\frac{R_0 \widehat{\theta}_0}{c_{V0}} \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \widetilde{\theta} \Big) = u_*^2 \Big[\tau_0 \frac{\widehat{\theta}_0^2 \theta_*}{c_{V0} \rho_0 u_*^2} \langle R_\alpha^2 \rho_{\alpha *} \Delta \widetilde{\rho}_\alpha \rangle +$$

$$+ 2\tau_0 \frac{R_0 \widehat{\theta}_0}{c_{V0}} (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}} + \tau_0 (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)^2 \widetilde{\theta} + \Big(\tau_0 \frac{(R^2)_0 \theta_0}{c_{V0} u_*^2} + \frac{\varkappa_0}{c_{V0} \rho_0 u_*^2} \Big) \Delta \widetilde{\theta} \Big].$$

Симметризованная линеаризованная КГД система

$$\partial_t \widetilde{\rho}_\alpha + u_* \big(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \widetilde{\rho}_\alpha + \widehat{\rho}_{\alpha 0} \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}}\big) =$$
$$= \tau_0 u_*^2 \big[a_\alpha \widehat{\theta}_0 \Delta \widetilde{\rho}_\alpha + (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)^2 \widetilde{\rho}_\alpha + 2\widehat{\rho}_{\alpha 0} (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}} + a_\alpha \widehat{\rho}_{\alpha 0} \Delta \widetilde{\theta}\big],$$
$$\alpha = \overline{1, K},$$
$$\partial_t \widetilde{\mathbf{u}} + u_* \big(\langle \widehat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \widetilde{\rho}_\alpha \rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{u}} + a_0 \nabla \widetilde{\theta}\big) = u_*^2 \big[2\tau_0 (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \langle \widehat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \widetilde{\rho}_\alpha \rangle +$$
$$+ \bar{\mu}_0 \Delta \widetilde{\mathbf{u}} + \big(\bar{\chi}_0 + \tau_0 \widehat{\theta}_0 (a\gamma)_0\big) \nabla \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}} + \tau_0 (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)^2 \widetilde{\mathbf{u}} + 2\tau_0 a_0 (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \nabla \widetilde{\theta}\big],$$
$$\partial_t \widetilde{\theta} + u_* \big(a_0 \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \widetilde{\theta}\big) =$$
$$= u_*^2 \big[\tau_0 \langle a_\alpha \widehat{\rho}_{\alpha 0} \Delta \widetilde{\rho}_\alpha \rangle + 2\tau_0 a_0 (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}} +$$
$$+ \tau_0 (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)^2 \widetilde{\theta} + (\tau_0 (a^2)_0 + \bar{\varkappa}_0) \Delta \widetilde{\theta}\big],$$

где для удобства записи введены постоянные

$$a_\alpha := \frac{R_\alpha \theta_*}{u_*^2}, \quad a_0 := \langle c_{\alpha_0} a_\alpha \rangle = \frac{R_0 \theta_*}{u_*^2}, \quad (a\gamma)_0 = \langle c_{\alpha_0} a_\alpha \gamma_\alpha \rangle,$$
$$(a^2)_0 := \langle c_{\alpha_0} a_\alpha^2 \rangle, \quad \bar{\mu}_0 := \frac{\mu_0}{\rho_0 u_*^2}, \quad \bar{\chi}_0 := \frac{\chi_0}{\rho_0 u_*^2}, \quad \bar{\varkappa}_0 := \frac{\varkappa_0}{c_{V0} \rho_0 u_*^2}.$$

Интегральное тождество и билинейные формы

Рассмотрим симметризованную линеаризованную систему уравнений в цилиндре $Q := \Omega \times (0, \infty)$ при краевых и начальных условиях $\widetilde{\mathbf{z}}|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0$ и $\widetilde{\mathbf{z}}|_{t=0} = \widetilde{\mathbf{z}}^{(0)}(x)$. При $\partial_t \widetilde{\mathbf{z}}(\cdot, t), \nabla\widetilde{\mathbf{z}}(\cdot, t) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ системе отвечает интегральное тождество

$$\big(\partial_t \widetilde{\mathbf{z}}(\cdot, t), \mathbf{z}\big)_{\mathbf{\Omega}} + u_* \mathcal{B}_\Omega(\widetilde{\mathbf{z}}(\cdot, t), \mathbf{z}) + u_*^2 \mathcal{A}_\Omega(\widetilde{\mathbf{z}}(\cdot, t), \mathbf{z}) = 0 \ \ \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

$$t > 0,\ \mathbf{z} = (\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, \theta)(x)$$

Свойства билинейных форм

Билинейные формы

$$\mathcal{B}_\Omega(\widetilde{\mathbf{z}},\mathbf{z}) := \big\langle \big(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\widetilde{\rho}_\alpha + \widehat{\rho}_{\alpha 0}\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}},\rho_\alpha\big)_\Omega\big\rangle +$$

$$+\big(\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + a_0\nabla\widetilde{\theta},\mathbf{u}\big)_{\mathbf{\Omega}} + \big(a_0\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\widetilde{\theta},\theta\big)_\Omega$$

$$\mathcal{A}_\Omega(\widetilde{\mathbf{z}},\mathbf{z}) := \bar{\mu}_0\big(\nabla\widetilde{\mathbf{u}},\nabla\mathbf{u}\big)_{\mathbf{\Omega}} + \bar{\chi}_0\big(\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}},\operatorname{div}\mathbf{u}\big)_\Omega + \bar{\varkappa}_0\big(\nabla\widetilde{\theta},\nabla\theta\big)_{\mathbf{\Omega}} +$$

$$+\tau_0\big[\big\langle\big(a_\alpha\widehat{\theta}_0\nabla\widetilde{\rho}_\alpha,\nabla\rho_\alpha\big)_{\mathbf{\Omega}}\big\rangle + \big\langle\big(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\widetilde{\rho}_\alpha,(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\rho_\alpha\big)_\Omega\big\rangle +$$

$$+2\big((\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}},\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\rho_\alpha\rangle\big)_{\mathbf{\Omega}} + \big(\nabla\widetilde{\theta},\langle a_\alpha\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\rho_\alpha\rangle\big)_{\mathbf{\Omega}} +$$

$$+2\big(\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle,(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}\big)_{\mathbf{\Omega}} + \big(\widehat{\theta}_0(a\gamma)_0\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}},\operatorname{div}\mathbf{u}\big)_\Omega +$$

$$+\big((\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}},(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}\big)_{\mathbf{\Omega}} + 2\big(a_0\nabla\widetilde{\theta},(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}\big)_{\mathbf{\Omega}} +$$

$$+\big(\big\langle a_\alpha\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\big\rangle,\nabla\theta\big)_{\mathbf{\Omega}} + 2\big((\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}},a_0\nabla\theta\big)_{\mathbf{\Omega}} +$$

$$+\big(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\widetilde{\theta},\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\theta\big)_\Omega + \big((a^2)_0\nabla\widetilde{\theta},\nabla\theta\big)_{\mathbf{\Omega}}\big],$$

где тензоры $\nabla\widetilde{\mathbf{u}},\nabla\mathbf{u}$ рассматриваются как векторы длины n^2.

Верны свойства

$$\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{z},\mathbf{z}) = 0 \quad \forall\mathbf{z}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad \mathcal{A}_\Omega(\widetilde{\mathbf{z}},\mathbf{z}) = \mathcal{A}_\Omega(\mathbf{z},\widetilde{\mathbf{z}}) \quad \forall\,\widetilde{\mathbf{z}},\mathbf{z}\in\mathbf{H}^1(\Omega).$$

Лемма

Пусть $\mathbf{z} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, *причем* $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1_0(\Omega)$, *тогда*

$$\mathcal{A}_\Omega(\mathbf{z},\mathbf{z}) = \bar{\mu}_0\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{\Omega}} + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2_\Omega + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\theta\|^2_{\mathbf{\Omega}} +$$
$$+\tau_0\big[\big\langle\big\|\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\rho_\alpha + \widehat{\rho}_{\alpha 0}\operatorname{div}\mathbf{u}\big\|^2_\Omega\big\rangle + \big\langle\big\|(\widehat{\theta}_0 a_\alpha)^{1/2}\nabla\rho_\alpha + \sqrt{c_{\alpha 0}}(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u} +$$
$$+\sqrt{c_{\alpha 0}}a_\alpha\nabla\theta\big\|^2_{\mathbf{\Omega}}\big\rangle + \big\|a_0\operatorname{div}\mathbf{u} + \widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\theta\big\|^2_\Omega + g_0\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2_\Omega\big] \geqslant$$
$$\geqslant \max\big\{\delta_1\tau_0\big\langle\big\|\nabla\rho_\alpha\big\|^2_{\mathbf{\Omega}}\big\rangle,\ \bar{\mu}_0\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{\Omega}} + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2_\Omega + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\theta\|^2_{\mathbf{\Omega}}\big\},$$

где $\delta_1 := \frac{1}{2}\big(1+\max\{2\delta_0-1,0\}\big)^{-1}\widehat{\theta}_0\min_{\alpha=\overline{1,K}} a_\alpha$,
$\delta_0 := \tau_0\max\big\{\frac{|\widehat{\mathbf{u}}_0|^2}{\bar{\mu}_0},\ \frac{(a^2)_0}{\bar{\varkappa}_0}\big\}$, $g_0 = \frac{\theta_0}{u_*^2}\langle c_{\alpha 0}c_{V\alpha}(\gamma_\alpha - \widetilde{\gamma}_0)^2\rangle \geqslant 0$,
$\widetilde{\gamma}_0 := \frac{R_0}{c_{V0}} - 1$.

Введем пространство $\mathbf{V}(Q_T) := \{\widetilde{\mathbf{z}} \in L^2((0,T);\mathbf{H}_0^1(\Omega));\ \partial_t\widetilde{\mathbf{z}} \in L^2((0,T);\mathbf{H}^{-1}(\Omega))\}$, где $Q_T = \Omega \times (0,T)$, область Ω ограничена и $\mathbf{H}^{-1}(\Omega) = (\mathbf{H}_0^1(\Omega))^*$, и напомним, что $\mathbf{V}(Q_T) \subset C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega))$. Для начально-краевой задачи для симметризованной системы уравнений в Q с условиями $\widetilde{\mathbf{z}}|_{\partial\Omega\times(0,\infty)} = 0$, $\widetilde{\mathbf{z}}|_{t=0} = \widetilde{\mathbf{z}}^{(0)} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ введем слабое решение $\widetilde{\mathbf{z}} \in \mathbf{V}(Q_T)$ для всех $T > 0$, удовлетворяющее интегральному тождеству

$$\int_0^T \left\langle \partial_t\widetilde{\mathbf{z}}(\cdot,t), \mathbf{z}(\cdot,t)\right\rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}_0^1(\Omega)} dt + u_*\mathcal{B}_{Q_T}(\widetilde{\mathbf{z}},\mathbf{z}) + u_*^2\mathcal{A}_{Q_T}(\widetilde{\mathbf{z}},\mathbf{z}) = 0$$

$\forall \mathbf{z} \in \mathbf{L}^2((0,T);\mathbf{H}_0^1(\Omega))$, для всех $T > 0$. Здесь в билинейных формах $\mathcal{B}_{Q_T}$ и $\mathcal{A}_{Q_T}$ скалярные произведения берутся по Q_T, а не Ω как выше.

Теорема

1. Слабое решение $\widetilde{\mathbf{z}} \in \mathbf{V}(Q_T)$ *с любым* $T > 0$ *линеаризованной КГД системы уравнений существует и единственно и для него верно энергетическое равенство*

$$\tfrac{1}{2}\|\widetilde{\mathbf{z}}(\cdot,T)\|^2_{\mathbf{\Omega}} + u_*^2\mathcal{A}_{Q_T}(\widetilde{\mathbf{z}},\widetilde{\mathbf{z}}) = \tfrac{1}{2}\|\widetilde{\mathbf{z}}^{(0)}\|^2_{\mathbf{\Omega}} \quad \forall T > 0.$$

2. Существует производная $\partial_t\big(\|\widetilde{\mathbf{z}}\|^2_{\mathbf{\Omega}}\big) \in L^1(0,\infty)$*, верны свойство* $\mathbf{L}^2(\Omega)$*-диссипативности* $\partial_t\big(\|\widetilde{\mathbf{z}}(\cdot,t)\|^2_{\mathbf{\Omega}}\big) \leqslant 0$ *п.в. на* $(0,\infty)$ *(и поэтому* $\max_{t\geqslant 0}\|\widetilde{\mathbf{z}}(\cdot,t)\|_{\mathbf{\Omega}} = \|\widetilde{\mathbf{z}}^{(0)}\|_{\mathbf{\Omega}}$*) и оценка*

$$2u_*^2\max\big\{\delta_1\tau_0\big\langle\big\|\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\big\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}\big\rangle,\ \bar{\mu}_0\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)} +$$
$$+\bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2_{L^2(Q)} + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\theta\|^2_{\mathbf{L}^2(Q)}\big\} \leqslant \|\widetilde{\mathbf{z}}^{(0)}\|^2_{\mathbf{\Omega}}.$$

Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.

Анализ параболичности по Петровскому Результат применения преобразования Фурье $\mathcal{F}$ по x

$$\partial_t \mathcal{F}\mathbf{z}(\zeta,t) + u_*^2|\zeta|^2 A(\mathbf{z}_0,\xi)\mathcal{F}\mathbf{z}(\zeta,t) = 0, \quad t>0,$$

с параметром $\zeta \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ и вещественной матрицей $A(\mathbf{z}_0,\xi)$ порядка $K+n+1$ с вектором-столбцом $\xi = \zeta/|\zeta|$.
$\lambda[A(\mathbf{z}_0,\xi)]$ — собственные значения введенной матрицы.
Выполним замену $\mathbf{z} = D_*\widetilde{\mathbf{z}}$ с введенной выше матрицей $D_* = D_*(\mathbf{z}_0)$.
Тогда $\mathcal{F}\mathbf{z} = D_*\mathcal{F}\widetilde{\mathbf{z}}$ и после умножения исследуемой системы слева на D_*^{-1} получим эквивалентную систему

$$\partial_t \mathcal{F}\widetilde{\mathbf{z}}(\zeta,t) + u_*^2|\zeta|^2 \hat{A}(\mathbf{z}_0,\xi)\mathcal{F}\widetilde{\mathbf{z}}(\zeta,t) = 0, \quad t>0,$$

с матрицей $\hat{A}(\mathbf{z}_0,\xi) = D_*^{-1}A(\mathbf{z}_0,\xi)D_*$, подобной матрице $A(\mathbf{z}_0,\xi)$.
Поэтому $\hat{A}(\mathbf{z}_0,\xi) = [\hat{A}(\mathbf{z}_0,\xi)]^T$ и $\lambda[\hat{A}(\mathbf{z}_0,\xi)] = \lambda[A(\mathbf{z}_0,\xi)] \in \mathbb{R}$.

Параболичность по Петровскому (в области D) — это свойство матрицы A вторых производных после замены $\partial_i \to \mathbf{i}\xi_i$, $i=1,\dots,n$

$$\inf_{(\rho,\mathbf{u},\theta)\in D} \inf_{|\xi|=1} \operatorname{Re}\lambda[A(\mathbf{z}_0,\xi)] > 0, \quad \xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$$

Пусть $\Lambda = \mathrm{diag}\{a_1, \ldots, a_K\}$, I_k — единичная матрица порядка k, $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0 := (\widehat{\rho}_{10}, \ldots, \widehat{\rho}_{K0})^T$, $s = s(\xi) := \widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \xi$. Явный 3×3-блочный вид матрицы $\hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi)$ таков:

$$\hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi) = \begin{pmatrix} \tau_0(\widehat{\theta}_0 \Lambda + s^2 I_K) & 2\tau_0 s \widehat{\boldsymbol{\rho}}_0 \otimes \xi & \tau_0 \Lambda \widehat{\boldsymbol{\rho}}_0 \\ 2\tau_0 s \xi \otimes \widehat{\boldsymbol{\rho}}_0 & (\bar{\mu}_0 + \tau_0 s^2) I_n + \widehat{a}_{22} \xi \xi^T & 2\tau_0 a_0 s \xi \\ \tau_0 \widehat{\boldsymbol{\rho}}_0^T \Lambda & 2\tau_0 a_0 s \xi^T & \bar{\varkappa}_0 + \tau_0 \left[s^2 + (a^2)_0 \right] \end{pmatrix}$$

$$\widehat{a}_{22} = \bar{\chi}_0 + \tau_0 \widehat{\theta}_0 (a\gamma)_0$$

Квадратичная форма с матрицей $\hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi)$ имеет вид

$$\hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi)\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \bar{\mu}_0 |\mathbf{v}|^2 + \bar{\chi}_0 (\xi \cdot \mathbf{v})^2 + \bar{\varkappa}_0 q^2 + \tau_0 \big\{ \widehat{\theta}_0 \langle a_\alpha r_\alpha^2 \rangle + s^2 |\mathbf{r}|^2 +$$
$$+ 4s(\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0 \cdot \mathbf{r}) \xi \cdot \mathbf{v} + 2\langle a_\alpha \widehat{\rho}_{\alpha 0} r_\alpha \rangle q + s^2 |\mathbf{v}|^2 + \widehat{\theta}_0 (a\gamma)_0 (\xi \cdot \mathbf{v})^2 +$$
$$+ 4a_0 s (\xi \cdot \mathbf{v}) q + \left[s^2 + (a^2)_0 \right] q^2 \big\}$$

для любого блочного вектора $\mathbf{b} := (\mathbf{r}^T, \mathbf{v}, q)^T$ с $\mathbf{r}^T = (r_1, \ldots, r_K) \in \mathbb{R}^K$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{R}$.

Лемма

Для любого блочного вектора $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{K+n+1}$ *верны формула и неравенства*

$$\hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi)\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \bar{\mu}_0|\mathbf{v}|^2 + \bar{\chi}_0(\xi \cdot \mathbf{v})^2 + \bar{\varkappa}_0 q^2 + \tau_0\big\{|s\mathbf{r} + (\xi \cdot \mathbf{v})\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0|^2 +$$
$$+\big\langle\big|(\widehat{\theta}_0 a_\alpha)^{1/2} r_\alpha \xi + \sqrt{c_{\alpha 0}} s\mathbf{v} + \sqrt{c_{\alpha 0}} a_\alpha q \xi\big|^2\big\rangle + [a_0(\xi \cdot \mathbf{v}) + sq]^2 +$$
$$+ g_0(\xi \cdot \mathbf{v})^2\big\} \geqslant \max\{\delta_1 \tau_0 |\mathbf{r}|^2, \bar{\mu}_0|\mathbf{v}|^2 + \bar{\chi}_0(\xi \cdot \mathbf{v})^2 + \bar{\varkappa}_0 q^2\} \geqslant \delta_2 |\mathbf{b}|^2$$

с $\delta_2 := \frac{1}{2}\min\{\delta_1\tau_0, \bar{\mu}_0, \bar{\varkappa}_0\} > 0.$

Теорема

Пусть $\tau, \mu, \lambda, \varkappa \in C^2(\mathcal{D})$. *Пусть начальные данные* $\boldsymbol{\rho}^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)}, \theta^{(0)} \in C^{(2,\beta)}(\mathbb{R}^n)$, *причем их значения* $(\boldsymbol{\rho}^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)}, \theta^{(0)})(x)$ *принадлежат какому–либо компакту в* $\mathcal{D}$ *и* $\mathbf{f} \in C^{(0,\beta,0)}(\bar{\Pi}_T)$, $Q_\alpha \in C^{(1,\beta,0)}(\bar{\Pi}_T)$, $\alpha = \overline{1, K}$.
Тогда при достаточно малом $T > 0$ *задача Коши для КГД системы уравнений в слое* Π_T *имеет единственное классическое решение* $\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, \theta \in C^{(2,\beta,\beta/2)}(\bar{\Pi}_T)$ *с* $\partial_t \boldsymbol{\rho}, \partial_t \mathbf{u}, \partial_t \theta \in C^{(0,\beta,0)}(\bar{\Pi}_T)$, *и его значения* $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, \theta)(x, t)$ *принадлежат* $\mathcal{D}$.

Здесь $C^{(m,\beta,\beta_t)}(\bar{\Pi}_T)$ с $m = 0, 1, 2$, $0 \leqslant \beta_t < 1$ — пространства функций, имеющих непрерывные и ограниченные в $\bar{\Pi}_T$ производные порядка $k = 0, \ldots, m$ по x, удовлетворяющие условию Гёльдера порядка β по x и β_t по t (при $0 < \beta_t < 1$) равномерно в $\bar{\Pi}_T$, а $C^{(2,\beta)}(\mathbb{R}^n)$ — стандартные пространства Гёльдера.

Эйдельман С.Д. Параболические системы. М.: Наука, 1964.

Результаты

- Для агрегированной квазигазодинамической системы уравнений гомогенной газовой смеси получено уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии при наличии потоков диффузии,
- Выведены существование, единственность и L^2 -диссипативность слабых решений начально-краевой задачи для системы, линеаризованной на постоянном решении,
- Доказаны сильная параболичность и локальная по времени классическая однозначная разрешимость задачи Коши для самой квазигазодинамической системы.

Публикации

- *Злотник А.А., Федченко А.С.* Свойства агрегированной квазигазодинамической системы уравнений гомогенной газовой смеси //Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. Т. 501. №. 0. С. 31-37. 2021 https://doi.org/10.31857/S2686954321060199
- *Zlotnik A., Fedchenko A.* On properties of aggregated regularized systems of equations for a homogeneous multicomponent gas mixture // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2022 https://doi.org/10.1002/mma.8214

Спасибо за внимание!