Задача 1.

А) Дана функция $f(x) = \sqrt{|x|+|2x^2-2|}$. Заметим, что функция четная, то есть если мы возьмем $f(-x)$, то получим такое же выражение (по свойству модуля и по свойству квадрата). Соответственно, рассматривать функцию можно только на полуинтервале $x \in [0; +\infty)$. Теперь можем сказать, что знак корня не так важен для анализа так как он относится к монотонному преобразованию в данном случае и свойства подкоренного выражения $|x|+|2x^2-2|$ совпадают с самой функцией. Теперь земетим, что $2|x^2-1|$ можно раскрыть двумя способами, в зависимости от того, как x сравнивается с единицей. Получаем кусочно заданную непрерывную функцию. Пусть $0 < x \leq 1$, тогда получаем $x + 2 - 2x^2$. Это парабола ветвями вниз - оптимум в вершине. Возьмем производную и получим $1 - 4x = 0$, отсюда $x = 0.25$. Очевидно, что значение в нуле и в единице будут меньше по свойствам квадратичных функций. Так же очевидно, что в нуле не может быть локального максимума, так как в окрестности 0 все значения функции будут строго меньше (опять же по убыванию квадратичной функции). Теперь рассмотрим случай, когда $x \geq 1$. Получаем $x + 2x^2 - 2$. Это парабола ветвями вниз - значит функция имеет свой минимум в какой-то точке, а затем бесконечно возрастает и больше никаких локальных максимумов нет, как и глобальных - функция бесконечно возрастает. Теперь соберем все вместе и получаем, что есть две точки локального максимуа в $x = \pm 0.25$ в силу четности функции. Глобального нет - функция бесконечно возрастает.

Критерии оценивания:

- 5 баллов за найденный локальный максимум.
- 5 баллов за глобальный максимум при полностью правильном объяснении.
- 2 балла можно получить за одну точку локального экстремума/глобальный максимум - бесконечность без объяснения/минимальные продвижения
- 4 балла можно получить за раскрытие функции, но без найденных точек.

Б) Имеем задачу поиска максимума функциии x^2+y^2 при условии, что $2x+y = 10$ и $x, y \geq 0$. Перевыразим и подставим, в зависимости от y (получаем $y = 10 - 2x$). Отсюда $x^2 + (10 - 2x)^2$. Раскрываем скобки, получаем $5x^2 + 100 - 40x$. Получили параболу ветвями вверх, а значит максимум будет достигаться в крайних точках, то есть когда $x = 0$ или когда $x = 5$. В нуле получаем 100, при $x = 5$ получаем 25. $25 < 100$, выбираем $x = 0$ и $y = 10$.

Критерии выставления баллов:

- 0 баллов выставляется, если найден минимум
- 10 баллов выставляется за полностью правильный ответ
- от 2 до 4 баллов выставляются за продвижения, если не получен окончательный ответ, но есть логические обоснования по получению ответа.

Задача 2.

Для решения этой задачи достаточно предположить, что $x_n = x_{n-1} = x_{n+1}$, что и является точкой равновесия - значения меняться не будут после достижения какого-то числа n. То же самое и с y_n. Отсюда можем перейти к системе:

$$\begin{cases} x = 0.6x + 0.2y + 8 \\ y = 0.8y + 0.3x + 8 \end{cases}$$

Отсюда получаем решение, в котором $x = 160$ и $y = 280$.

Критерии выставления баллов:

- 20 баллов за полностью правильный ответ и решение
- 2 балла за минимальные продвижения: мысль, что $x_{n-1} = x_n = x$, но дальнейшее решение системы привело к неправильным выводам.

Задача 3.

Небходимо было преобразовать обе части исходного неравенства таким образом, чтобы в правой части неравенства были выделены полные квадраты:

$$x + 0.5 > y^2 + z^2 \Rightarrow$$

$$x + y + z > y^2 + y + z^2 + z - 0.5 \Rightarrow$$

$$x + y + z > y^2 + y + 0.25 + z^2 + z + 0.25 - 0.25 - 0.25 - 0.5 \Rightarrow$$

$$x + y + z > (y + 0.5)^2 + (z + 0.5)^2 - 1$$

Далее, зная, что выражения в квадрате неотрицательные, оценим снизу полученное в правой части неравенства выражение:

$$(y + 0.5)^2 + (z + 0.5)^2 - 1 \geq -1 \Rightarrow$$

$$x + y + z > -1$$

Если доказано, что x>-0,5, то ставится 2 балла. За выделение полных квадратов ставится от 5 до 10 баллов в зависимости от того, насколько выделенные полные квадраты позволяют продвинуться к полностью обоснованному решению. Полностью верное решение с обоснованием - 20 баллов.

Задача 4.

Парабола ветви вниз, значит максимум в вершине. (+2 б).
$x* = \dfrac{3}{2(a^2 - a + 1)}$ (+5 б).
Тогда $y = \dfrac{9}{4(a^2 - a + 1)^2} + 1 \Rightarrow max$ (+ 3 б).
выражение с а - парабола ветви вверх, значит минимум в вершине (+ 2 б.)
$a = 1/2$ (+3 б.)
ymax=5 (+3 б.)
хв=2 (+2 б.)

Задача 5.

Решение в идеале должно было представлять собой оценку+пример.
Оценка:

- Оценим сверху количество заездов. Хорошим решением здесь было бы разделить сначала всех участников на 6 заездов поровну. Затем тройку призеров в каждом из 6 первых заездов оставить в соревнованиях, а остальных убрать. Таким образом, у нас останется $6 \cdot 3 = 18$ участников. Далее мы можем их разбить на 3 заезда по 6 человек, опять же выявить тройку лидеров в каждом и у нас останется 9 человек. Пока что прошло в сумме 9 заездов. Теперь оставшихся разбиваем на две группы, в одной из них будет 4 человека, а в другой 5. Проводим еще два заезда, выявляем по тройке лидеров в каждом. У нас остается 6 финалистов и среди них проводим еще один заезд. Останется топ-3. То есть заездов в оптимуме ≤ 12. (Можно было привести более эффективную оценку сверху).

- Оценим количество заездов снизу. Очевидно, нам потребуется минимум 6 заездов, чтобы выявить 18 сильнейших участников. Кроме того, если мы проведем следующий, 7 по счету, заезд среди только лидеров каждого из первых 6 забегов, у нас останутся кандидаты на топ-3 все равно. Поэтому заездов в оптимуме > 7.

Пример: Продолжим решение из оценки снизу. Мы провели 7 заездов (6 изначальных и седьмой среди победителей в каждом из первых шести). Тогда остаются подозрительными кандидатами на топ-3: топ-3 из седьмого заезда; гонщики, занявшие 2 и 3 места в заезде, где победил топ-1 из седьмого заезда; гонщик, занявший 2 место в заезде, где победил серебряный призер седьмого заезда. Итого 6 КамАЗов. Проводим гонку между ними и выявляем окончательный топ-3. Таким образом, минимальное количество заездов 8.

Критерии:

За минимальное правильное продвижение ставилось 2 балла.

За хорошую оценку сверху ставилось 4 балла.

За хорошую оценку снизу ставилось 4 балла.

За корректный пример ставилось 10 баллов.