О применении алгебр Клиффорда для построения эквивариантных нейронных сетей

Семинар “Алгебры Клиффорда и приложения”

Катя Филимошина

24.02.2024

0.

Введение

Недавние работы по приложениям АК в DL

CLIFFORD NEURAL LAYERS FOR PDE MODELING

Johannes Brandstetter
Microsoft Research AI4Science
johannesb@microsoft.com

Rianne van den Berg
Microsoft Research AI4Science
rvandenberg@microsoft.com

Max Welling
Microsoft Research AI4Science
maxwelling@microsoft.com

Jayesh K. Gupta
Microsoft Autonomous Systems and Robotics Research
jayesh.gupta@microsoft.com

Geometric Algebra Transformer

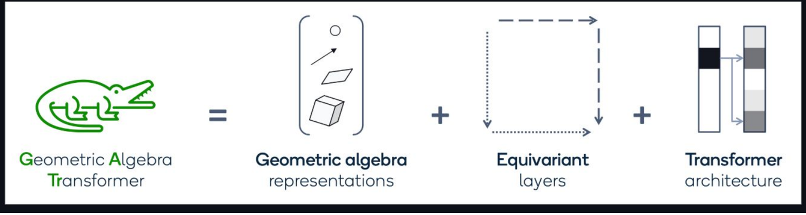
Johann Brehmer* **Pim de Haan*** **Sönke Behrends** **Taco Cohen**
Qualcomm AI Research†

Geometric Clifford Algebra Networks

David Ruhe [1] **Jayesh K. Gupta** [2] **Steven de Keninck** [3] **Max Welling** [4] **Johannes Brandstetter** [4]

Geometric Algebra Transformers

This repository contains the official implementation of the Geometric Algebra Transformer by Johann Brehmer, Pim de Haan, Sönke Behrends, and Taco Cohen, published at NeurIPS 2023.



Clifford Group Equivariant Neural Networks

David Ruhe
AI4Science Lab, AMLab, API
University of Amsterdam
david.ruhe@gmail.com

Johannes Brandstetter
Microsoft Research
AI4Science
brandstetter@ml.jku.at

Patrick Forré
AI4Science Lab, AMLab
University of Amsterdam
p.d.forre@uva.nl

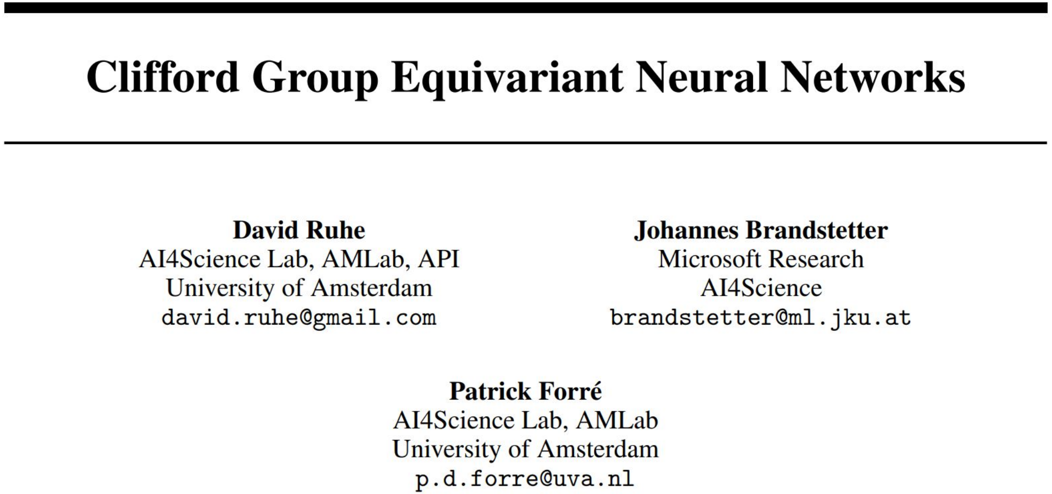
Euclidean, Projective, Conformal: Choosing a Geometric Algebra for Equivariant Transformers

Pim de Haan PIM@QTI.QUALCOMM.COM
Taco Cohen TACOS@QTI.QUALCOMM.COM
Johann Brehmer JBREHMER@QTI.QUALCOMM.COM

Clifford Group Equivariant Neural Network Layers for Protein Structure Prediction

Alberto Pepe*[1], Sven Buchholz[2], and Joan Lasenby[1]

Clifford Group Equivariant Neural Networks

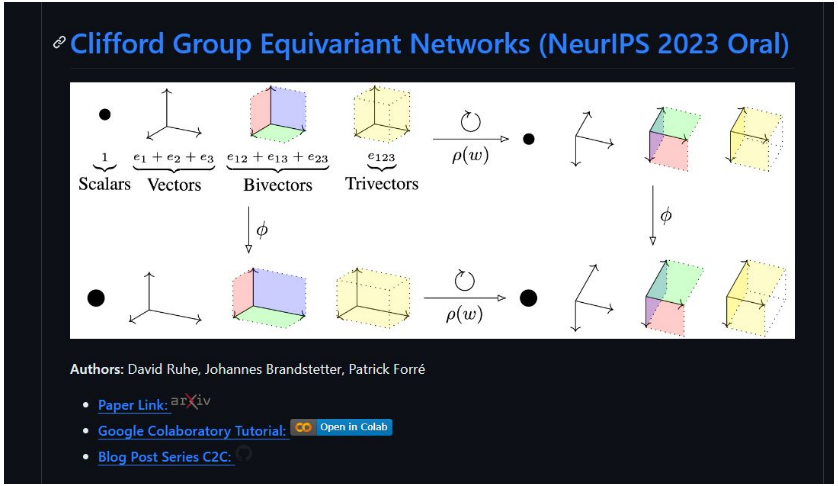


Clifford Group Equivariant Neural Networks

David Ruhe
AI4Science Lab, AMLab, API
University of Amsterdam
david.ruhe@gmail.com

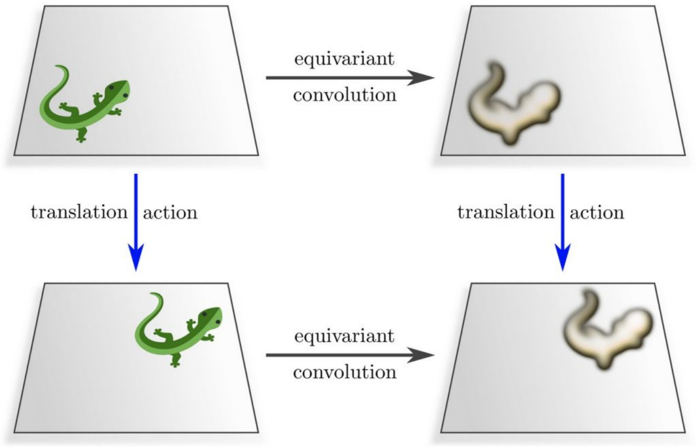
Johannes Brandstetter
Microsoft Research
AI4Science
brandstetter@ml.jku.at

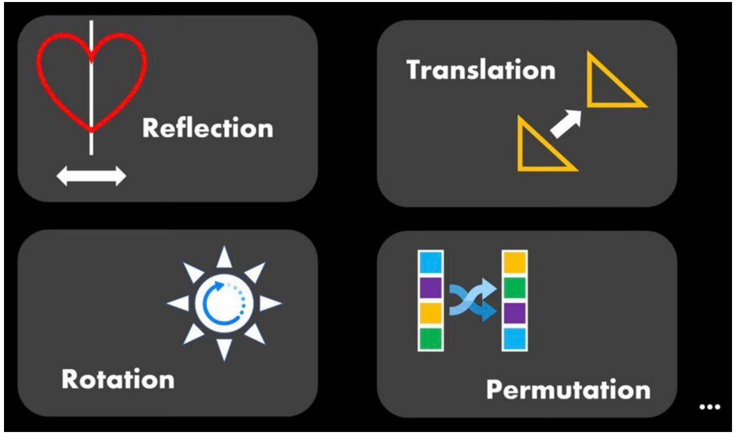
Patrick Forré
AI4Science Lab, AMLab
University of Amsterdam
p.d.forre@uva.nl

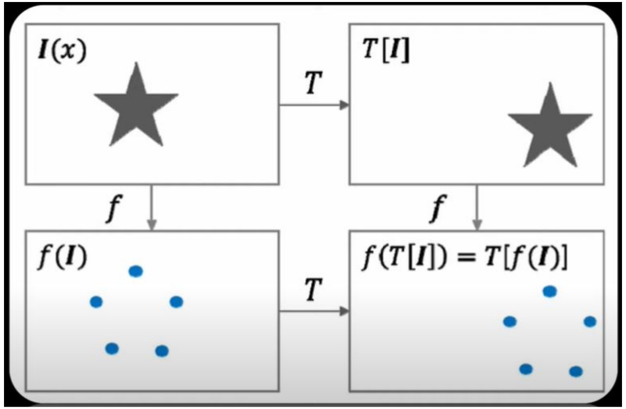


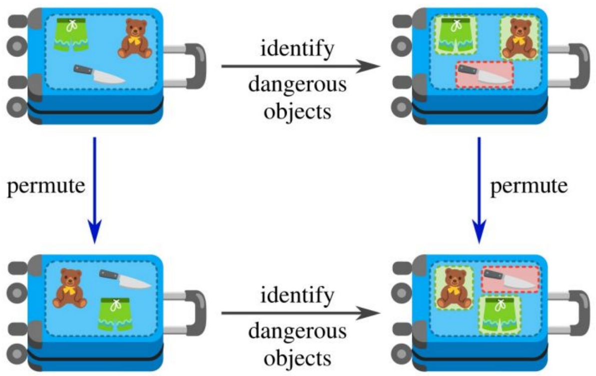
Ruhe D., Brandstetter J., Forré P.: Clifford Group Equivariant Neural Networks
https://arxiv.org/pdf/2305.11141.pdf

Об эквивариантных нейронных сетях









План

1. Основные понятия и обозначения

2. Clifford Group Equivariant Neural Networks:
    a. Связь эквивариантности отображения по отношению к псевдоортогональной группе и группе Липшица
    b. Отображения, эквивариантные по отношению к группе Липшица
    c. Методология построения Clifford Group Equivariant NN
    d. Эксперименты

3. Идеи по обобщению Clifford Group Equivariant Neural Networks

1.

Основные понятия и обозначения

Невырожденные алгебры Клиффорда

Будем рассматривать векторное пространство $V = \mathbb{R}^{p,q}$

Будем рассматривать алгебру Клиффорда (геометрическую алгебру) $\mathcal{G}(V) = \mathcal{G}_{p,q}$. $p + q = n \geq 1$

Будем обозначать единичный элемент через e, генераторы – через e_a, $a = 1, \ldots, n$. Генераторы удовлетворяют:

$$e_a e_b + e_b e_a = 2\eta_{ab} e, \qquad \forall a, b = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где η_{ab} – элементы матрицы η.

$$\eta = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q}).$$

Невырожденные алгебры Клиффорда

Обозначим через $\mathcal{G}^k_{p,q}$ подпространства фиксированных рангов $k = 0, \ldots, n$. Их элементы являются линейными комбинациями базисных элементов $e_{a_1\ldots a_k} := e_{a_1} \cdots e_{a_k}$, $a_1 < \cdots < a_k$.

Чётностное сопряжение от мультивектора $U \in \mathcal{G}_{p,q}$ будем обозначать через $\widehat{U}$, реверс – через $\widetilde{U}$, Клиффордово сопряжение – через $\widehat{\widetilde{U}}$. Эти операции обладают следующими известными свойствами:

$$\widehat{UV} = \widehat{U}\widehat{V}, \qquad \widetilde{UV} = \widetilde{V}\widetilde{U}, \qquad \widehat{\widetilde{UV}} = \widehat{\widetilde{V}}\widehat{\widetilde{U}}, \qquad \forall U, V \in \mathcal{G}_{p,q}. \tag{2}$$

Чётностное сопряжение определяет чётное $\mathcal{G}^{(0)}_{p,q}$ и нечётное $\mathcal{G}^{(1)}_{p,q}$ подпространства:

$$\mathcal{G}^{(k)}_{p,q} = \{U \in \mathcal{G}_{p,q} : \quad \widehat{U} = (-1)^k U\} = \bigoplus_{j=k \bmod 2} \mathcal{G}^j_{p,q}, \qquad k = 0, 1. \tag{3}$$

Рассмотрим операцию проецирования мультивектора на чётное и нечётное подпространства $\mathcal{G}^{(l)}_{p,q}$, $l = 0, 1$. Любой мультивектор $U \in \mathcal{G}_{p,q}$ может быть представлен в виде суммы 2 слагаемых:

$$U = \langle U \rangle_{(0)} + \langle U \rangle_{(1)}, \qquad \text{где} \quad \langle U \rangle_{(0)} \in \mathcal{G}^{(0)}_{p,q}, \quad \langle U \rangle_{(1)} \in \mathcal{G}^{(1)}_{p,q}. \tag{4}$$

Центр алгебры Клиффорда $\mathcal{G}_{p,q}$ обозначим через $\mathrm{Z}_{p,q}$. Известно, что

$$\mathrm{Z}_{p,q} = \begin{cases} \mathcal{G}^0_{p,q} \oplus \mathcal{G}^n_{p,q}, & n \text{ – нечётное}, \\ \mathcal{G}^0_{p,q}, & n \text{ – чётное}. \end{cases} \tag{5}$$

Группы Клиффорда и Липшица

Будем использовать $\times$ для обозначения подмножества $\mathrm{H}^{\times}$ всех обратимых элементов любого множества H.

Рассмотрим известные группы Клиффорда:

$$\Gamma_{p,q} \quad := \quad \{T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q} : \quad T\mathcal{G}^{1}_{p,q}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^{1}_{p,q}\},$$

и группы Липшица:

$$\Gamma^{\pm}_{p,q} \quad := \quad \{T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q} : \quad \widehat{T}\mathcal{G}^{1}_{p,q}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^{1}_{p,q}\}$$

Группы Клиффорда и Липшица

Будем использовать $\times$ для обозначения подмножества $\mathrm{H}^{\times}$ всех обратимых элементов любого множества H.

Рассмотрим известные группы Клиффорда:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{p,q} &:= \{T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q} : \quad T\mathcal{G}^{1}_{p,q}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^{1}_{p,q}\}, \\
&= \{T \in \mathrm{Z}^{\times}_{p,q}(\mathcal{G}^{(0)\times}_{p,q} \cup \mathcal{G}^{(1)\times}_{p,q}) : \quad T\mathcal{G}^{1}_{p,q}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^{1}_{p,q}\} \\
&= \{W v_1 \cdots v_m : \quad m \leq n, \quad W \in \mathrm{Z}^{\times}_{p,q}, \quad v_j \in \mathcal{G}^{1\times}_{p,q}\}
\end{aligned}$$

и группы Липшица:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\pm}_{p,q} &:= \{T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q} : \quad \widehat{T}\mathcal{G}^{1}_{p,q}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^{1}_{p,q}\} \\
&= \{T \in \mathcal{G}^{(0)\times}_{p,q} \cup \mathcal{G}^{(1)\times}_{p,q} : \quad T\mathcal{G}^{1}_{p,q}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^{1}_{p,q}\} \\
&= \{v_1 \cdots v_m : \quad m \leq n, \quad v_j \in \mathcal{G}^{1\times}_{p,q}\}.
\end{aligned}$$

Присоединённое и скрученное присоединённое действия

Присоединённое действие ad действует на группу всех обратимых элементов $\mathrm{ad} : \mathcal{G}^{\times}_{p,q} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{p,q})$ как $T \mapsto \mathrm{ad}_T$, где $\mathrm{ad}_T : \mathcal{G}_{p,q} \to \mathcal{G}_{p,q}$:

$$\mathrm{ad}_T(U) = TUT^{-1}, \qquad U \in \mathcal{G}_{p,q}, \qquad T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q}. \tag{12}$$

Скрученное присоединённое действие введено авторами Atiyah, Bott и Shapiro в [2]. Оно действует на группу Липшица $\Gamma^{\pm}_{0,q}$ как $\check{\mathrm{ad}} : \Gamma^{\pm}_{0,q} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}^1_{0,q})$ и $T \to \check{\mathrm{ad}}_T$, где $\check{\mathrm{ad}}_T : \mathcal{G}^1_{0,q} \to \mathcal{G}^1_{0,q}$ определено для элементов $\mathcal{G}^1_{0,q}$ (векторов) как

$$\check{\mathrm{ad}}_T(U) = \widehat{T}UT^{-1}, \qquad U \in \mathcal{G}^1_{0,q}, \qquad T \in \Gamma^{\pm}_{0,q}. \tag{13}$$

Есть два способа, как обобщить определение (13) на случай любой $\mathcal{G}_{p,q}$ и произвольных $T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q}$, $U \in \mathcal{G}_{p,q}$.

Первый подход: скрученное присоединённое действие $\check{\mathrm{ad}}$ действует на группу всех обратимых элементов $\check{\mathrm{ad}} : \mathcal{G}^{\times}_{p,q} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{p,q})$ как $T \mapsto \check{\mathrm{ad}}_T$ с $\check{\mathrm{ad}}_T : \mathcal{G}_{p,q} \to \mathcal{G}_{p,q}$:

$$\check{\mathrm{ad}}_T(U) = \widehat{T}UT^{-1}, \qquad U \in \mathcal{G}_{p,q}, \qquad T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q}. \tag{14}$$

Присоединённое и скрученное присоединённое действия

Второй подход: скрученное присоединённое действие $\tilde{\mathrm{ad}}$ действует на группу всех обратимых элементов $\tilde{\mathrm{ad}} : \mathcal{G}^{\times}_{p,q} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{p,q})$ как $T \mapsto \tilde{\mathrm{ad}}_T$ с $\tilde{\mathrm{ad}}_T : \mathcal{G}_{p,q} \to \mathcal{G}_{p,q}$:

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T(U) = T\langle U\rangle_{(0)}T^{-1} + \widehat{T}\langle U\rangle_{(1)}T^{-1}, \qquad \forall U \in \mathcal{G}_{p,q}, \qquad T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q}. \tag{15}$$

Заметим, что для элементов $U_{(0)}$ и $U_{(1)}$ фиксированной чётности верно

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T(U_{(0)}) = \mathrm{ad}_T(U_{(0)}), \qquad \forall U_{(0)} \in \mathcal{G}^{(0)}_{p,q}, \qquad T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q}, \tag{16}$$

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T(U_{(1)}) = \check{\mathrm{ad}}_T(U_{(1)}), \qquad \forall U_{(1)} \in \mathcal{G}^{(1)}_{p,q}, \qquad T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q}. \tag{17}$$

$\mathrm{ad}_T(U) = TUT^{-1}$,

$\check{\mathrm{ad}}_T(U) = \widehat{T}UT^{-1}$

Будем обозначать с помощью $\tilde{\mathrm{ad}}^1$ действие $\tilde{\mathrm{ad}}^1 : \mathcal{G}^{\times}_{p,q} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{p,q})$, которое действует как $T \mapsto \tilde{\mathrm{ad}}^1_T$, где $\tilde{\mathrm{ad}}^1_T : \mathcal{G}^1_{p,q} \to \mathcal{G}_{p,q}$:

$$\tilde{\mathrm{ad}}^1_T(v) := \widehat{T}vT^{-1}, \quad \forall v \in \mathcal{G}^1_{p,q}, \tag{18}$$

То есть $\tilde{\mathrm{ad}}^1$ – это $\tilde{\mathrm{ad}}$, суженное на $\mathcal{G}^1_{p,q}$.

Присоединённое и скрученное присоединённое действия

$$\mathrm{ad}_T(U) = TUT^{-1}, \qquad U \in \mathcal{G}_{p,q}, \qquad T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q}. \tag{12}$$

$$\check{\mathrm{ad}}_T(U) = \widehat{T}UT^{-1}, \qquad U \in \mathcal{G}_{p,q}, \qquad T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q}. \tag{14}$$

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T(U) = T\langle U\rangle_{(0)}T^{-1} + \widehat{T}\langle U\rangle_{(1)}T^{-1}, \qquad \forall U \in \mathcal{G}_{p,q}, \qquad T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q}. \tag{15}$$

Лемма 1 *Пусть* $T \in \mathcal{G}^{(0)\times}_{p,q} \cup \mathcal{G}^{(1)\times}_{p,q}$, $W \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q}$ *и* $x, x_1, x_2 \in \mathcal{G}_{p,q}$. *Тогда*

$$\tilde{\mathrm{ad}}_W \text{ является линейным}: \quad \tilde{\mathrm{ad}}_W(x_1 + x_2) = \tilde{\mathrm{ad}}_W(x_1) + \tilde{\mathrm{ad}}_W(x_2), \quad \tilde{\mathrm{ad}}_W(cx_1) = c \cdot \tilde{\mathrm{ad}}_W(x_1), \tag{19}$$

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T \text{ является мультипликативным:} \quad \tilde{\mathrm{ad}}_T(x_1x_2) = \tilde{\mathrm{ad}}_T(x_1)\tilde{\mathrm{ad}}_T(x_2). \tag{20}$$

Доказательство. Формула (19) следует из определений ad (12), $\check{\mathrm{ad}}$ (14) и $\tilde{\mathrm{ad}}$ (15). Докажем (20). Имеем

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathrm{ad}}_T(x_1)\tilde{\mathrm{ad}}_T(x_2) &= (T\langle x_1\rangle_{(0)}T^{-1} + \widehat{T}\langle x_1\rangle_{(1)}T^{-1})(T\langle x_2\rangle_{(0)}T^{-1} + \widehat{T}\langle x_2\rangle_{(1)}T^{-1}) && (21)\\
&= T\langle x_1\rangle_{(0)}\langle x_2\rangle_{(0)}T^{-1} + \widehat{T}\langle x_1\rangle_{(1)}\langle x_2\rangle_{(0)}T^{-1} && (22)\\
&\quad + T\langle x_1\rangle_{(0)}T^{-1}\widehat{T}\langle x_2\rangle_{(1)}T^{-1} + \widehat{T}\langle x_1\rangle_{(1)}T^{-1}\widehat{T}\langle x_2\rangle_{(1)}T^{-1} && (23)\\
&= T\langle x_1\rangle_{(0)}\langle x_2\rangle_{(0)}T^{-1} + \widehat{T}\langle x_1\rangle_{(1)}\langle x_2\rangle_{(0)}T^{-1} && (24)\\
&\quad + \widehat{T}\langle x_1\rangle_{(0)}\langle x_2\rangle_{(1)}T^{-1} + T\langle x_1\rangle_{(1)}\langle x_2\rangle_{(1)}T^{-1} = \tilde{\mathrm{ad}}_T(x_1x_2), && (25)
\end{aligned}$$

где мы пользуемся $\widehat{T} = \pm T$ для $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$ (10). ■

Эквивариантные отображения

Определение 1 (Действие группы) *Пусть G –группа и X – множество. Действие группы – это отображение:*

$$\circ : G \times X \to X, \qquad (g, x) \mapsto g \circ x, \tag{26}$$

которое удовлетворяет:

- *ассоциативности:* $(gh) \circ x = g \circ (h \circ x)$ *для любых* $g, h \in G$ *и* $x \in X$,
- *условию на нейтральный элемент:* $e \circ x = x$ *для любого* $x \in X$.

В этом докладе мы заинтересованы в

- действии $\widetilde{\mathrm{ad}}$ группы Липшица $\Gamma^{\pm}_{p,q} = \{T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q} : \quad \widehat{T}\mathcal{G}^1_{p,q}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^1_{p,q}\}$ на множествах $\mathcal{G}_{p,q}$ и $\mathcal{G}^k_{p,q}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.
- действии ad группы Клиффорда $\Gamma_{p,q} = \{T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q} : \quad T\mathcal{G}^1_{p,q}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^1_{p,q}\}$ на множествах $\mathcal{G}_{p,q}$ и $\mathcal{G}^k_{p,q}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Эквивариантные отображения

В этом докладе мы заинтересованы в

- действии $\widetilde{\mathrm{ad}}$ группы Липшица $\Gamma^{\pm}_{p,q} = \{T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q}: \quad \widehat{T}\mathcal{G}^1_{p,q}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^1_{p,q}\}$ на множествах $\mathcal{G}_{p,q}$ и $\mathcal{G}^k_{p,q}$, $k = 0, 1, \dots, n$.
- действии ad группы Клиффорда $\Gamma_{p,q} = \{T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q}: \quad T\mathcal{G}^1_{p,q}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^1_{p,q}\}$ на множествах $\mathcal{G}_{p,q}$ и $\mathcal{G}^k_{p,q}$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Определение 2 (Эквивариантное отображение) *Пусть G – группа, $\circ_X$ и $\circ_Y$ – действия этой группы на множествах X и Y соответственно. Отображение $L : X \to Y$ называется G-эквивариантным тогда и только тогда когда оно коммутирует с $\circ_X$ и $\circ_Y$:*

$$L(g \circ_X x) = g \circ_Y L(x), \qquad \forall g \in G, \qquad \forall x \in X. \tag{27}$$

Например, отображение $L : \mathcal{G}_{p,q} \to \mathcal{G}_{p,q}$ называется $\Gamma^{\pm}_{p,q}$-эквивариантным, если для любых $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$ и $x \in \mathcal{G}_{p,q}$ верно

$$L(\widetilde{\mathrm{ad}}_T(x)) = \widetilde{\mathrm{ad}}_T(L(x)). \tag{28}$$

2.

Clifford Group Equivariant Neural Networks

2.1.

Эквивариантность отображения по отношению к действию псевдоортогональной группы и действию группы Липшица

Псевдоортогональные группы

На $V = \mathbb{R}^n$ задана симметричная билинейная форма $\mathfrak{b}(x,y)$: $\mathfrak{b}(x,y) := \frac{1}{2}(xy + yx), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$

С ней связана квадратичная форма: $\mathfrak{q}(x) := \mathfrak{b}(x,x).$

η – соответствующая матрица формы $\eta = \mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{p}, \underbrace{-1,\dots,-1}_{q}).$

Определение 3 *Группа невырожденных псевдоортогональных матриц:*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{O}(p,q) &:= \{O \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) | \quad O^T \eta O = \eta\} && (28)\\
&= \{\Phi : \mathbb{R}^{p,q} \to \mathbb{R}^{p,q} | \quad \Phi - \textit{линейное, обратимое}, \quad \mathfrak{q}(\Phi(v)) = \mathfrak{q}(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^{p,q}\} && (29)\\
&= \{O \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) | \quad \mathfrak{q}(Ov) = \mathfrak{q}(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^n\}. && (30)
\end{aligned}
$$

Определения (28) и (29) эквивалентны в силу:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{q}(\Phi(v)) = \mathfrak{q}(v) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathfrak{q}(Ov) = \mathfrak{q}(v) \quad \Leftrightarrow \quad (OV)^T \eta (OV) = v^T \eta v && (31)\\
&\Leftrightarrow \quad v^T (O^T \eta O) v = v^T \eta v \quad \Leftrightarrow \quad O^T \eta O = \eta. && (32)
\end{aligned}
$$

Эквивалентность $\mathrm{O}(p,q)$- и $\Gamma^{\pm}_{p,q}$- эквивариантности

Теорема 1 (Theorem 3.5 [8]) *В случае невырожденной* η *отображение* $\tilde{\mathrm{ad}}^1$ *определяет изоморфизм групп:*

$$\tilde{\mathrm{ad}}^1 : \quad \Gamma^{\pm}_{p,q}/\mathbb{R}^{\times} \xrightarrow{\sim} \mathrm{O}(p,q). \tag{33}$$

Эквивалентность $\mathrm{O}(p,q)$- и $\Gamma^{\pm}_{p,q}$-эквивариантности

Теорема 1 (Theorem 3.5 [8]) *В случае невырожденной η отображение $\tilde{\mathrm{ad}}^1$ определяет изоморфизм групп:*

$$\tilde{\mathrm{ad}}^1: \quad \Gamma^{\pm}_{p,q}/\mathbb{R}^{\times} \xrightarrow{\sim} \mathrm{O}(p,q). \tag{33}$$

Будем обозначать с помощью $\tilde{\mathrm{ad}}^1$ действие $\tilde{\mathrm{ad}}^1 : \mathcal{G}^{\times}_{p,q} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{p,q})$, которое действует как $T \mapsto \tilde{\mathrm{ad}}^1_T$, где $\tilde{\mathrm{ad}}^1_T : \mathcal{G}^1_{p,q} \to \mathcal{G}_{p,q}$:

$$\tilde{\mathrm{ad}}^1_T(v) := \widehat{T} v T^{-1}, \quad \forall v \in \mathcal{G}^1_{p,q}, \quad \forall T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q}. \tag{18}$$

То есть $\tilde{\mathrm{ad}}^1$ – это $\tilde{\mathrm{ad}}$, суженное на $\mathcal{G}^1_{p,q}$.

Эквивалентность $\mathrm{O}(p,q)$- и $\Gamma^{\pm}_{p,q}$-эквивариантности

Теорема 1 (Theorem 3.5 [8]) *В случае невырожденной η отображение $\tilde{\mathrm{ad}}^1$ определяет изоморфизм групп:*

$$\tilde{\mathrm{ad}}^1 : \quad \Gamma^{\pm}_{p,q}/\mathbb{R}^{\times} \xrightarrow{\sim} \mathrm{O}(p,q). \tag{33}$$

Доказательство. Имеем гомоморфизм $\tilde{\mathrm{ad}}^1$ групп $\Gamma^{\pm}_{p,q}$ и $\mathrm{O}(p,q)$:

$$\tilde{\mathrm{ad}}^1 : \quad \Gamma^{\pm}_{p,q} \to \mathrm{O}(p,q), \tag{34}$$

который является сюръективным (Теорема 2). Пользуясь основной теоремой о гомоморфизме, получаем, что группа $\mathrm{O}(p,q)$ изоморфна факторгруппе $\Gamma^{\pm}_{p,q}/\mathrm{Ker}(\tilde{\mathrm{ad}}^1)$. Пользуясь Леммой 2, получаем (33). ■

Эквивалентность $\mathrm{O}(p,q)$- и $\Gamma^{\pm}_{p,q}$-эквивариантности

Теорема 1 (Theorem 3.5 [8]) *В случае невырожденной η отображение $\tilde{\mathrm{ad}}^1$ определяет изоморфизм групп:*

$$\tilde{\mathrm{ad}}^1: \quad \Gamma^{\pm}_{p,q}/\mathbb{R}^{\times} \xrightarrow{\sim} \mathrm{O}(p,q). \tag{33}$$

Доказательство. Имеем гомоморфизм $\tilde{\mathrm{ad}}^1$ групп $\Gamma^{\pm}_{p,q}$ и $\mathrm{O}(p,q)$:

$$\tilde{\mathrm{ad}}^1: \quad \Gamma^{\pm}_{p,q} \to \mathrm{O}(p,q), \tag{34}$$

который является сюръективным (Теорема 2). Пользуясь основной теоремой о гомоморфизме, получаем, что группа $\mathrm{O}(p,q)$ изоморфна факторгруппе $\Gamma^{\pm}_{p,q}/\mathrm{Ker}(\tilde{\mathrm{ad}}^1)$. Пользуясь Леммой 2, получаем (33). ■

Первая теорема [править | править код]

Пусть $\varphi\colon G \to H$ — гомоморфизм групп, тогда:

если гомоморфизм φ сюръективен (то есть является эпиморфизмом), то группа H изоморфна факторгруппе $G/\ker\varphi$.

Ядро действия $\tilde{\mathrm{ad}}^1$ группы Липшица

Лемма 2 (Corollary E.22) *Ядро суженного на $\mathcal{G}^1_{p,q}$ скрученного присоединённого действия* $\tilde{\mathrm{ad}}^1 : \Gamma^{\pm}_{p,q} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{p,q})$ *группы Липшица* $\Gamma^{\pm}_{p,q}$ *совпадает с* $\mathcal{G}^{0\times}$*:*

$$\ker(\tilde{\mathrm{ad}}^1 : \Gamma^{\pm}_{p,q} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{p,q})) = \mathcal{G}^{0\times}. \tag{35}$$

Доказательство. Пользуясь Леммой 3 [5], получаем

$$\begin{aligned}
\ker(\tilde{\mathrm{ad}}^1 : \Gamma^{\pm}_{p,q} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{p,q})) &= \{T \in \Gamma^{\pm}_{p,q} : \quad \widehat{T} v T^{-1} = v, \quad \forall v \in \mathcal{G}^1_{p,q}\} \\
&= \Gamma^{\pm}_{p,q} \cap \{T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q} : \quad \widehat{T} v T^{-1} = v, \quad \forall v \in \mathcal{G}^1_{p,q}\} = \Gamma^{\pm}_{p,q} \cap \mathcal{G}^{0\times} = \mathcal{G}^{0\times}.
\end{aligned}$$

[5] Filimoshina, E., Shirokov, D.: On generalization of Lipschitz groups and spin groups. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 1–26 (2022)

Образ действия $\tilde{\mathrm{ad}}^1$ группы Липшица

Теорема 2 (Theorem E.25) *Образ скрученного присоединённого действия* $\tilde{\mathrm{ad}}$ *группы Липшица* $\Gamma^{\pm}_{p,q}$, *суженного на* $\mathcal{G}^1_{p,q}$, *т.е.* $\tilde{\mathrm{ad}}^1 : \Gamma^{\pm}_{p,q} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{p,q})$, *совпадает с соответствующей псевдоортогональной группой* $\mathrm{O}(p,q)$*:*

$$\mathrm{Im}(\tilde{\mathrm{ad}}^1 : \Gamma^{\pm}_{p,q} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{p,q})) = \mathrm{O}(p,q). \tag{42}$$

Доказательство.

Образ действия $\tilde{\mathrm{ad}}^1$ группы Липшица

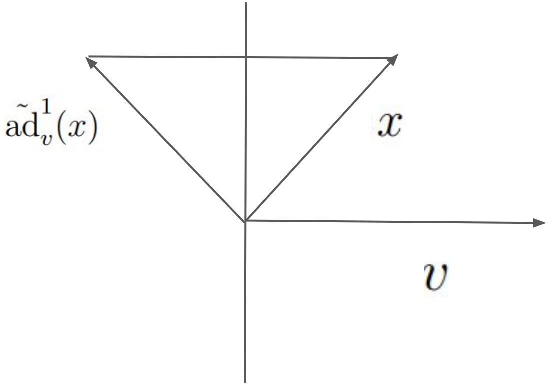
Замечание 1. Для любых векторов $v, v_1, v_2 \in \mathcal{G}^1_{p,q}$ верно

$$\mathfrak{q}(v) = v^2, \qquad 2\mathfrak{b}(v_1, v_2) = v_1 v_2 + v_2 v_1. \tag{40}$$

Пример 1. Отображение $\tilde{\mathrm{ad}}^1_v$, $v \in \mathcal{G}^{1\times}_{p,q}$, действует на произвольном векторе $x \in \mathcal{G}^1_{p,q}$ как отражение вектора x относительно гиперплоскости, ортогональной вектору v, то есть

$$\tilde{\mathrm{ad}}^1_v(x) = \widehat{v} x v^{-1} = x - 2\frac{\mathfrak{b}(x, v)}{\mathfrak{b}(v, v)} v$$

(разность вектора x и удвоенной проекции вектора x на вектор v).



Образ действия $\tilde{\mathrm{ad}}^1$ группы Липшица

Теорема 2 (Theorem E.25) *Образ скрученного присоединённого действия* $\tilde{\mathrm{ad}}$ *группы Липшица* $\Gamma^{\pm}_{p,q}$, *суженного на* $\mathcal{G}^1_{p,q}$, *т.е.* $\tilde{\mathrm{ad}}^1 : \Gamma^{\pm}_{p,q} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{p,q})$, *совпадает с соответствующей псевдоортогональной группой* $\mathrm{O}(p,q)$:

$$\mathrm{Im}(\tilde{\mathrm{ad}}^1 : \Gamma^{\pm}_{p,q} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{p,q})) = \mathrm{O}(p,q). \qquad (42)$$

Доказательство. Сначала докажем, что $\mathrm{Im}(\tilde{\mathrm{ad}}^1 : \Gamma^{\pm}_{p,q} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{p,q})) \subseteq \mathrm{O}(p,q)$, то есть что $\tilde{\mathrm{ad}}^1_T \in \mathrm{O}(p,q)$ для любого $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$. Пусть $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$, тогда $\tilde{\mathrm{ad}}_T$ является линейным и обратимым отображением (Лемма 1). Нам нужно показать, что

$$\mathfrak{q}(\tilde{\mathrm{ad}}_T(v)) = \mathfrak{q}(v), \qquad \forall v \in \mathcal{G}^1_{p,q}. \qquad (47)$$

Пользуясь Замечанием 1 и мультипликативностью $\tilde{\mathrm{ad}}_T$ (Лемма 1), получаем

$$\mathfrak{q}(\tilde{\mathrm{ad}}_T(v)) = \tilde{\mathrm{ad}}_T(v)\tilde{\mathrm{ad}}_T(v) = \tilde{\mathrm{ad}}_T(v^2) = \tilde{\mathrm{ad}}_T(\mathfrak{q}(v)) = \mathfrak{q}(v).$$

Мы доказали равенство (47). Значит, по определению (33), имеем $\tilde{\mathrm{ad}}^1_T \in \mathrm{O}(p,q)$ для любого $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$, и утверждение доказано.

$$\mathrm{O}(p,q) = \{\Phi : \mathbb{R}^{p,q} \to \mathbb{R}^{p,q} \mid \quad \Phi - \textit{линейное, обратимое}, \quad \mathfrak{q}(\Phi(v)) = \mathfrak{q}(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^{p,q}\} \qquad (33)$$

Образ действия $\tilde{\mathrm{ad}}^1$ группы Липшица

Теорема 2 (Theorem E.25) *Образ скрученного присоединённого действия* $\tilde{\mathrm{ad}}$ *группы Липшица* $\Gamma^{\pm}_{p,q}$, *суженного на* $\mathcal{G}^1_{p,q}$, *т.е.* $\tilde{\mathrm{ad}}^1 : \Gamma^{\pm}_{p,q} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{p,q})$, *совпадает с соответствующей псевдоортогональной группой* $\mathrm{O}(p,q)$*:*

$$\mathrm{Im}(\tilde{\mathrm{ad}}^1 : \Gamma^{\pm}_{p,q} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{p,q})) = \mathrm{O}(p,q). \tag{42}$$

Доказательство.

Теперь докажем, что $\mathrm{O}(p,q) \subseteq \mathrm{Im}(\tilde{\mathrm{ad}}^1 : \Gamma^{\pm}_{p,q} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{p,q}))$, то есть докажем сюръективность отображения $\tilde{\mathrm{ad}}^1$. Пусть $\Phi \in \mathrm{O}(p,q)$, тогда, по теореме Картана–Дьёдонне,

$$\Phi = O_1 \cdots O_k, \qquad k \leq n, \tag{52}$$

где O_i, $i = 1, \ldots, k$, – матрица отражения относительно невырожденной гиперплоскости, ортогональной некоторому вектору нормали v_i. Значит, $O_i x = \tilde{\mathrm{ad}}_{v_i}(x)$ для любого вектора x. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi x &= O_1 \cdots O_k x = \tilde{\mathrm{ad}}_{v_1}(\cdots \tilde{\mathrm{ad}}_{v_{k-1}}(\tilde{\mathrm{ad}}_{v_k}(x))) = \widehat{v_1} \cdots \widehat{v_{k-1}} \widehat{v_k} x v_k^{-1} v_{k-1}^{-1} \cdots v_1^{-1} && (53) \\ &= (\widehat{v_1 \cdots v_k}) x (v_1 \cdots v_k)^{-1} = \tilde{\mathrm{ad}}_{v_1 \cdots v_k}(x). && (54) \end{aligned}$$

Так как $v_i \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$, $i = 1, \ldots, k$, то и $v_1 \cdots v_k \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$. Значит, для любого $\Phi \in \mathrm{O}(p,q)$ найдется такой $v_1 \cdots v_k \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$, что $\tilde{\mathrm{ad}}_{v_1 \cdots v_k}(x) = \Phi(x)$, и утверждение доказано. ■

Эквивалентность $\mathrm{O}(p,q)$- и $\Gamma^{\pm}_{p,q}$-эквивариантности

Теорема 1 (Theorem 3.5 [8]) *В случае невырожденной η отображение $\tilde{\mathrm{ad}}^1$ определяет изоморфизм групп:*

$$\tilde{\mathrm{ad}}^1 : \quad \Gamma^{\pm}_{p,q}/\mathbb{R}^{\times} \xrightarrow{\sim} \mathrm{O}(p,q). \tag{33}$$

Будем обозначать с помощью $\tilde{\mathrm{ad}}^1$ действие $\tilde{\mathrm{ad}}^1 : \mathcal{G}^{\times}_{p,q} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{p,q})$, которое действует как $T \mapsto \tilde{\mathrm{ad}}^1_T$, где $\tilde{\mathrm{ad}}^1_T : \mathcal{G}^1_{p,q} \to \mathcal{G}_{p,q}$:

$$\tilde{\mathrm{ad}}^1_T(v) := \widehat{T} v T^{-1}, \quad \forall v \in \mathcal{G}^1_{p,q}, \quad \forall T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q}. \tag{18}$$

То есть $\tilde{\mathrm{ad}}^1$ – это $\tilde{\mathrm{ad}}$, суженное на $\mathcal{G}^1_{p,q}$.

Эквивалентность $\mathrm{O}(p,q)$- и $\Gamma^{\pm}_{p,q}$- эквивариантности

Теорема 1 (Theorem 3.5 [8]) *В случае невырожденной η отображение $\tilde{\mathrm{ad}}^1$ определяет изоморфизм групп:*

$$\tilde{\mathrm{ad}}^1 : \quad \Gamma^{\pm}_{p,q}/\mathbb{R}^{\times} \xrightarrow{\sim} \mathrm{O}(p,q). \tag{33}$$

Будем обозначать с помощью $\tilde{\mathrm{ad}}^1$ действие $\tilde{\mathrm{ad}}^1 : \mathcal{G}^{\times}_{p,q} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_{p,q})$, которое действует как $T \mapsto \tilde{\mathrm{ad}}^1_T$, где $\tilde{\mathrm{ad}}^1_T : \mathcal{G}^1_{p,q} \to \mathcal{G}_{p,q}$:

$$\tilde{\mathrm{ad}}^1_T(v) := \widehat{T} v T^{-1}, \quad \forall v \in \mathcal{G}^1_{p,q}, \quad \forall T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q}. \tag{18}$$

То есть $\tilde{\mathrm{ad}}^1$ – это $\tilde{\mathrm{ad}}$, суженное на $\mathcal{G}^1_{p,q}$.

Пусть $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$, тогда существует такое $\Phi \in \mathrm{O}(p,q)$, что $\tilde{\mathrm{ad}}^1_T = \Phi$.
Пусть $\Phi \in \mathrm{O}(p,q)$, тогда существует такой $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$, что $\tilde{\mathrm{ad}}^1_T = \Phi$.

Эквивалентность $\mathrm{O}(p,q)$- и $\Gamma^{\pm}_{p,q}$- эквивариантности

Пусть $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$, тогда существует такое $\Phi \in \mathrm{O}(p,q)$, что $\tilde{\mathrm{ad}}^1_T = \Phi$.
Пусть $\Phi \in \mathrm{O}(p,q)$, тогда существует такой $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$, что $\tilde{\mathrm{ad}}^1_T = \Phi$.

Замечание 3. Пусть

$$x \in \mathcal{G}^1_{p,q}, \qquad f : \mathcal{G}^1_{p,q} \to \mathcal{G}^1_{p,q}. \tag{61}$$

Пусть $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$. Рассмотрим такое $\Phi \in \mathrm{O}(p,q)$, что $\Phi = \tilde{\mathrm{ad}}^1_T$. Если

$$f(\tilde{\mathrm{ad}}^1_T(x)) = \tilde{\mathrm{ad}}^1_T(f(x)), \tag{62}$$

то

$$f(\Phi(x)) = \Phi(f(x)). \tag{63}$$

Эквивалентность $\mathrm{O}(p,q)$- и $\Gamma^{\pm}_{p,q}$-эквивариантности

Пусть $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$, тогда существует такое $\Phi \in \mathrm{O}(p,q)$, что $\tilde{\mathrm{ad}}^1_T = \Phi$.
Пусть $\Phi \in \mathrm{O}(p,q)$, тогда существует такой $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$, что $\tilde{\mathrm{ad}}^1_T = \Phi$.

Замечание 3. Пусть

$$x \in \mathcal{G}^1_{p,q}, \qquad f : \mathcal{G}^1_{p,q} \to \mathcal{G}^1_{p,q}. \tag{61}$$

Пусть $\Phi \in \mathrm{O}(p,q)$. Рассмотрим такой $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$, что $\Phi = \tilde{\mathrm{ad}}^1_T$. Если

$$f(\Phi(x)) = \Phi(f(x)), \tag{64}$$

то

$$f(\tilde{\mathrm{ad}}^1_T(x)) = \tilde{\mathrm{ad}}^1_T(f(x)). \tag{65}$$

Эквивалентность $\mathrm{O}(p,q)$- и $\Gamma^{\pm}_{p,q}$-эквивариантности

Теорема 1 (Theorem 3.5 [8]) *В случае невырожденной η отображение $\tilde{\mathrm{ad}}^1$ определяет изоморфизм групп:*

$$\tilde{\mathrm{ad}}^1 : \quad \Gamma^{\pm}_{p,q}/\mathbb{R}^{\times} \xrightarrow{\sim} \mathrm{O}(p,q). \qquad (33)$$

Замечание 2. Из Теоремы 1 следует, что для произвольного мультивектора $x = \sum_i c_i \cdot v_{i,1} \cdots v_{i,k}$, где $c_i \in \mathbb{R}$, $v_{i,j} \in \mathcal{G}^1_{p,q}$, и $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$ верно:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{ad}}_T(x) &= \tilde{\mathrm{ad}}_T(\sum_i c_i \cdot v_{i,1} \cdots v_{i,k}) = \sum_i c_i \cdot \tilde{\mathrm{ad}}_T(v_{i,1} \cdots v_{i,k}) = \sum_i c_i \cdot \tilde{\mathrm{ad}}_T(v_{i,1}) \cdots \tilde{\mathrm{ad}}_T(v_{i,k}) && (51) \\ &= \sum_i c_i \cdot \tilde{\mathrm{ad}}^1_T(v_{i,1}) \cdots \tilde{\mathrm{ad}}^1_T(v_{i,k}) = \sum_i c_i \cdot \Phi(v_{i,1}) \cdots \Phi(v_{i,k}), && (52) \end{aligned}$$

где $\Phi \in \mathrm{O}(p,q)$, такое что $\tilde{\mathrm{ad}}^1_T = \Phi$.

Эквивалентность $\mathrm{O}(p,q)$- и $\Gamma^{\pm}_{p,q}$- эквивариантности

Замечание 2. Из Теоремы 1 следует, что для произвольного мультивектора $x = \sum_i c_i \cdot v_{i,1} \cdots v_{i,k}$, где $c_i \in \mathbb{R}$, $v_{i,j} \in \mathcal{G}^1_{p,q}$, и $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$ верно:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{ad}}_T(x) &= \tilde{\mathrm{ad}}_T(\sum_i c_i \cdot v_{i,1} \cdots v_{i,k}) = \sum_i c_i \cdot \tilde{\mathrm{ad}}_T(v_{i,1} \cdots v_{i,k}) = \sum_i c_i \cdot \tilde{\mathrm{ad}}_T(v_{i,1}) \cdots \tilde{\mathrm{ad}}_T(v_{i,k}) \quad (51) \\ &= \sum_i c_i \cdot \tilde{\mathrm{ad}}^1_T(v_{i,1}) \cdots \tilde{\mathrm{ad}}^1_T(v_{i,k}) = \sum_i c_i \cdot \Phi(v_{i,1}) \cdots \Phi(v_{i,k}), \quad (52) \end{aligned}$$

где $\Phi \in \mathrm{O}(p,q)$, такое что $\tilde{\mathrm{ad}}^1_T = \Phi$.

Замечание 4. Пусть

$$x = \sum_i c_i v_{i,1} \cdots v_{i,k} \in \mathcal{G}_{p,q}, \qquad c_i \in \mathbb{R}, \quad v_{i,j} \in \mathcal{G}^1_{p,q}, \quad (66)$$

$$f : \mathcal{G}_{p,q} \to \mathcal{G}_{p,q}, \qquad f(x) = \sum_i d_i w_{i,1} \cdots w_{i,k} \in \mathcal{G}_{p,q}, \qquad d_i \in \mathbb{R}, \quad w_{i,j} \in \mathcal{G}^1_{p,q}. \quad (67)$$

Пусть $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$. Рассмотрим такое $\Phi \in \mathrm{O}(p,q)$, что $\Phi = \tilde{\mathrm{ad}}^1_T$. Если

$$f(\tilde{\mathrm{ad}}_T(x)) = \tilde{\mathrm{ad}}_T(f(x)), \quad (68)$$

то

$$f\Big(\sum_i c_i \Phi(v_{i,1}) \cdots \Phi(v_{i,k})\Big) = \sum_i d_i \Phi(w_{i,1}) \cdots \Phi(w_{i,k}). \quad (69)$$

Эквивалентность $\mathrm{O}(p,q)$- и $\Gamma^{\pm}_{p,q}$-эквивариантности

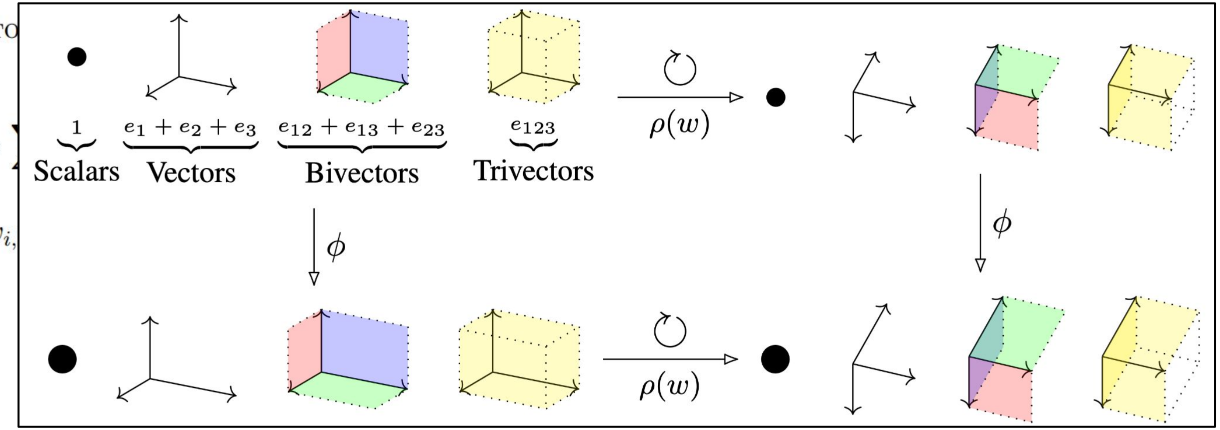
Замечание 2. Из Теоремы 1 следует, что

где $c_i \in \mathbb{R}$, $v_{i,j} \in \mathcal{G}^1_{p,q}$, и $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$ верно:

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T(x) = \tilde{\mathrm{ad}}_T(\sum_i c_i \cdot v_{i,1} \cdots v_{i,k}) = \sum$$

$$= \sum_i c_i \cdot \tilde{\mathrm{ad}}^1_T(v_{i,1}) \cdots \tilde{\mathrm{ad}}^1_T(v_{i,$$

где $\Phi \in \mathrm{O}(p,q)$, такое что $\tilde{\mathrm{ad}}^1_T = \Phi$.



Замечание 4. Пусть

$$x = \sum_i c_i v_{i,1} \cdots v_{i,k} \in \mathcal{G}_{p,q}, \qquad c_i \in \mathbb{R}, \quad v_{i,j} \in \mathcal{G}^1_{p,q}, \tag{66}$$

$$f : \mathcal{G}_{p,q} \to \mathcal{G}_{p,q}, \qquad f(x) = \sum_i d_i w_{i,1} \cdots w_{i,k} \in \mathcal{G}_{p,q}, \qquad d_i \in \mathbb{R}, \quad w_{i,j} \in \mathcal{G}^1_{p,q}. \tag{67}$$

Пусть $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$. Рассмотрим такое $\Phi \in \mathrm{O}(p,q)$, что $\Phi = \tilde{\mathrm{ad}}^1_T$. Если

$$f(\tilde{\mathrm{ad}}_T(x)) = \tilde{\mathrm{ad}}_T(f(x)), \tag{68}$$

то

$$f\Big(\sum_i c_i \Phi(v_{i,1}) \cdots \Phi(v_{i,k})\Big) = \sum_i d_i \Phi(w_{i,1}) \cdots \Phi(w_{i,k}). \tag{69}$$

Эквивалентность $\mathrm{O}(p,q)$- и $\Gamma^{\pm}_{p,q}$-эквивариантности

Замечание 2. Из Теоремы 1 следует, что для произвольного мультивектора $x = \sum_i c_i \cdot v_{i,1} \cdots v_{i,k}$, где $c_i \in \mathbb{R}$, $v_{i,j} \in \mathcal{G}^1_{p,q}$, и $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$ верно:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{ad}}_T(x) &= \tilde{\mathrm{ad}}_T\Big(\sum_i c_i \cdot v_{i,1} \cdots v_{i,k}\Big) = \sum_i c_i \cdot \tilde{\mathrm{ad}}_T(v_{i,1} \cdots v_{i,k}) = \sum_i c_i \cdot \tilde{\mathrm{ad}}_T(v_{i,1}) \cdots \tilde{\mathrm{ad}}_T(v_{i,k}) && (51) \\ &= \sum_i c_i \cdot \tilde{\mathrm{ad}}^1_T(v_{i,1}) \cdots \tilde{\mathrm{ad}}^1_T(v_{i,k}) = \sum_i c_i \cdot \Phi(v_{i,1}) \cdots \Phi(v_{i,k}), && (52) \end{aligned}$$

где $\Phi \in \mathrm{O}(p,q)$, такое что $\tilde{\mathrm{ad}}^1_T = \Phi$.

Замечание 5. Пусть

$$x = \sum_i c_i v_{i,1} \cdots v_{i,k} \in \mathcal{G}_{p,q}, \qquad c_i \in \mathbb{R}, \quad v_{i,j} \in \mathcal{G}^1_{p,q}, \tag{70}$$

$$f : \mathcal{G}_{p,q} \to \mathcal{G}_{p,q}, \qquad f(x) = \sum_i d_i w_{i,1} \cdots w_{i,k} \in \mathcal{G}_{p,q}, \qquad d_i \in \mathbb{R}, \quad w_{i,j} \in \mathcal{G}^1_{p,q}. \tag{71}$$

Пусть $\Phi \in \mathrm{O}(p,q)$. Рассмотрим такой $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$, что $\Phi = \tilde{\mathrm{ad}}^1_T$. Если

$$f\Big(\sum_i c_i \Phi(v_{i,1}) \cdots \Phi(v_{i,k})\Big) = \sum_i d_i \Phi(w_{i,1}) \cdots \Phi(w_{i,k}), \tag{72}$$

то

$$f(\tilde{\mathrm{ad}}_T(x)) = \tilde{\mathrm{ad}}_T(f(x)). \tag{73}$$

Эквивариантность по отношению к спинорным группам

$$\mathrm{Pin}(p,q) := \{T \in \Gamma^{\pm}_{p,q} : \quad \widetilde{T}T = \pm e\} = \{T \in \Gamma^{\pm}_{p,q} : \quad \widetilde{T}T = \pm e\}. \tag{55}$$

Замечание 4. Верно, что

$$\tilde{\mathrm{ad}}^1 : \quad \mathrm{Pin}(p,q) / \{\pm 1\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{O}(p,q), \tag{56}$$

поэтому отображение $f : \mathcal{G}_{p,q} \to \mathcal{G}_{p,q}$ эквивариантно по отношению к $\mathrm{O}(p,q)$ тогда и только тогда, когда оно эквивариантно по отношению к $\mathrm{Pin}(p,q)$

2.2.

Отображения, эквивариантные по отношению к группе Липшица

$\Gamma^{\pm}_{p,q}$ -эквивариантные отображения

Следующие функции от мультивекторов $\Gamma^{\pm}_{p,q}$ -эквивариантны:

- Многочлены,
- Проекции на подпространства фиксированных рангов $\mathcal{G}^{k}_{p,q}$

$\Gamma^{\pm}_{p,q}$ -эквивариантные отображения

Многочлены

Лемма 3 *[Corollary 3.4 [8]. Все многочлены эквивариантны по отношению к группе Липшица.] Пусть $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$ и $F \in \mathbb{R}[T_1, \ldots, T_l]$ – многочлен от l переменных с коэффициентами в $\mathbb{R}$. Рассмотрим l мультивекторов $x_1, \ldots, x_l \in \mathcal{G}_{p,q}$. Имеем следующее эквивариантное свойство:*

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T(F(x_1, \ldots, x_l)) = F(\tilde{\mathrm{ad}}_T(x_1), \ldots, \tilde{\mathrm{ad}}_T(x_l)). \tag{56}$$

$\Gamma^{\pm}_{p,q}$ -эквивариантные отображения

Многочлены

Лемма 3 *[Corollary 3.4 [8]. Все многочлены эквивариантны по отношению к группе Липшица.] Пусть $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$ и $F \in \mathbb{R}[T_1, \dots, T_l]$ – многочлен от l переменных с коэффициентами в $\mathbb{R}$. Рассмотрим l мультивекторов $x_1, \dots, x_l \in \mathcal{G}_{p,q}$. Имеем следующее эквивариантное свойство:*

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T(F(x_1, \dots, x_l)) = F(\tilde{\mathrm{ad}}_T(x_1), \dots, \tilde{\mathrm{ad}}_T(x_l)). \tag{56}$$

Доказательство. Утверждение следует из мультипликативности и линейности $\tilde{\mathrm{ad}}_T$ (Лемма 1).

Лемма 1 *Пусть $T \in \mathcal{G}^{(0)\times}_{p,q} \cup \mathcal{G}^{(1)\times}_{p,q}$, $U \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q}$, $W \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$ и $x, x_1, x_2 \in \mathcal{G}_{p,q}$. Тогда*

$$\tilde{\mathrm{ad}}_U \text{ является линейным}: \quad \tilde{\mathrm{ad}}_U(x_1 + x_2) = \tilde{\mathrm{ad}}_U(x_1) + \tilde{\mathrm{ad}}_U(x_2), \quad \tilde{\mathrm{ad}}_U(cx_1) = c \cdot \tilde{\mathrm{ad}}_U(x_1),$$

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T \text{ является мультипликативным:} \quad \tilde{\mathrm{ad}}_T(x_1 x_2) = \tilde{\mathrm{ad}}_T(x_1)\tilde{\mathrm{ad}}_T(x_2),$$

$\Gamma^{\pm}_{p,q}$ -эквивариантные отображения

Многочлены

Лемма 3 *[Corollary 3.4 [8]. Все многочлены эквивариантны по отношению к группе Липшица.] Пусть $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$ и $F \in \mathbb{R}[T_1, \dots, T_l]$ – многочлен от l переменных с коэффициентами в $\mathbb{R}$. Рассмотрим l мультивекторов $x_1, \dots, x_l \in \mathcal{G}_{p,q}$. Имеем следующее эквивариантное свойство:*

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T(F(x_1, \dots, x_l)) = F(\tilde{\mathrm{ad}}_T(x_1), \dots, \tilde{\mathrm{ad}}_T(x_l)). \tag{56}$$

Пример 2. Пусть $F(x_1, x_2) = \alpha x_1 x_2 + \beta x_1^2 + \gamma x_2^3$ – многочлен от мультивекторов $x_1, x_2 \in \mathcal{G}_{p,q}$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Пусть $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$. Тогда

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T(F(x_1, x_2)) = \tilde{\mathrm{ad}}_T(\alpha x_1 x_2 + \beta x_1^2 + \gamma x_2^3) = \tilde{\mathrm{ad}}_T(\alpha x_1 x_2) + \tilde{\mathrm{ad}}_T(\beta x_1^2) + \tilde{\mathrm{ad}}_T(\gamma x_2^3) = \tag{57}$$

$$= \alpha \tilde{\mathrm{ad}}_T(x_1) \tilde{\mathrm{ad}}_T(x_2) + \beta(\tilde{\mathrm{ad}}_T(x_1))^2 + \gamma(\tilde{\mathrm{ad}}_T(x_2))^3 = F(\tilde{\mathrm{ad}}_T(x_1), \tilde{\mathrm{ad}}_T(x_2)). \tag{58}$$

$\Gamma^{\pm}_{p,q}$ -эквивариантные отображения

Проецирование на подпространства фиксированных рангов

Рассмотрим операцию проецирования на подпространства фиксированных рангов $\mathcal{G}^k_{p,q}$, $k = 0, \ldots, n$. Любой мультивектор $U \in \mathcal{G}_{p,q}$ может быть представлен в виде суммы $n+1$ элементов

$$U = \langle U \rangle_0 + \langle U \rangle_1 + \cdots + \langle U \rangle_n, \qquad \text{где} \quad \langle U \rangle_k \in \mathcal{G}^k_{p,q}, \quad k = 0, \ldots, n. \tag{60}$$

$\Gamma^{\pm}_{p,q}$ -эквивариантные отображения

Проецирование на подпространства фиксированных рангов

Рассмотрим операцию проецирования на подпространства фиксированных рангов $\mathcal{G}^k_{p,q}$, $k = 0, \ldots, n$. Любой мультивектор $U \in \mathcal{G}_{p,q}$ может быть представлен в виде суммы $n+1$ элементов

$$U = \langle U \rangle_0 + \langle U \rangle_1 + \cdots + \langle U \rangle_n, \qquad \text{где} \quad \langle U \rangle_k \in \mathcal{G}^k_{p,q}, \quad k = 0, \ldots, n. \tag{60}$$

Теорема 3 *[Corollary 3.3] Пусть $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$ и $x \in \mathcal{G}_{p,q}$. Выполняется эквивариантное свойство:*

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T \langle x \rangle_m = \langle \tilde{\mathrm{ad}}_T x \rangle_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, n. \tag{61}$$

$\Gamma^{\pm}_{p,q}$ -эквивариантные отображения

Проецирование на подпространства фиксированных рангов

Рассмотрим группы, сохраняющие подпространства фиксированных рангов $\mathcal{G}^k_{p,q}$, $k = 0, \ldots, n$, при присоединённом действии ad и скрученных присоединённых действиях $\check{\mathrm{ad}}$ и $\tilde{\mathrm{ad}}$, которые рассмотрены в работах [5, 7, 10]:

$$\begin{aligned}
\Gamma^k_{p,q} &:= \{T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q} : \quad \mathrm{ad}_T(\mathcal{G}^k_{p,q}) := T\mathcal{G}^k_{p,q}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^k_{p,q}\}, && (64)\\
\check{\Gamma}^k_{p,q} &:= \{T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q} : \quad \check{\mathrm{ad}}_T(\mathcal{G}^k_{p,q}) := \widehat{T}\mathcal{G}^k_{p,q}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^k_{p,q}\}, && (65)\\
\tilde{\Gamma}^k_{p,q} &:= \{T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q} : \quad \tilde{\mathrm{ad}}_T(\mathcal{G}^k_{p,q}) \subseteq \mathcal{G}^k_{p,q}\}. && (66)
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\tilde{\Gamma}^k_{p,q} = \begin{cases} \check{\Gamma}^k_{p,q}, & k \text{ – нечётное,} \\ \Gamma^k_{p,q}, & k \text{ – чётное.} \end{cases} \qquad (67)$$

Группа $\Gamma^1_{p,q}$ – это группа Клиффорда $\Gamma_{p,q}$.
Группа $\check{\Gamma}^1_{p,q} = \tilde{\Gamma}^1_{p,q}$ – это группа Липшица $\Gamma^{\pm}_{p,q}$.

[5] Filimoshina, E., Shirokov, D.: On generalization of Lipschitz groups and spin groups. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 1–26 (2022)

[7] Filimoshina, E., Shirokov, D.: On Some Lie Groups in Degenerate Clifford Geometric Algebras. Advances in Applied Clifford Algebras, **33**(44), 29 pp. (2023), arXiv: 2301.06842

[10] Shirokov, D.: On inner automorphisms preserving fixed subspaces of Clifford algebras. Adv. Appl. Clifford Algebras **31**(30), (2021)

$\Gamma^{\pm}_{p,q}$ -эквивариантные отображения

Проецирование на подпространства фиксированных рангов

Рассмотрим группы, сохраняющие подпространства фиксированных рангов $\mathcal{G}^k_{p,q}$, $k = 0, \dots, n$, при присоединённом действии ad и скрученных присоединённых действиях $\check{\mathrm{ad}}$ и $\tilde{\mathrm{ad}}$, которые рассмотрены в работах [5, 7, 10]:

$$\Gamma^k_{p,q} := \{T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q} : \quad \mathrm{ad}_T(\mathcal{G}^k_{p,q}) := T\mathcal{G}^k_{p,q}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^k_{p,q}\}, \tag{64}$$

$$\check{\Gamma}^k_{p,q} := \{T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q} : \quad \check{\mathrm{ad}}_T(\mathcal{G}^k_{p,q}) := \widehat{T}\mathcal{G}^k_{p,q}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^k_{p,q}\}, \tag{65}$$

$$\tilde{\Gamma}^k_{p,q} := \{T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q} : \quad \tilde{\mathrm{ad}}_T(\mathcal{G}^k_{p,q}) \subseteq \mathcal{G}^k_{p,q}\}. \tag{66}$$

Заметим, что

$$\tilde{\Gamma}^k_{p,q} = \begin{cases} \check{\Gamma}^k_{p,q}, & k \text{ – нечётное}, \\ \Gamma^k_{p,q}, & k \text{ – чётное}. \end{cases} \tag{67}$$

Группа $\Gamma^1_{p,q}$ – это группа Клиффо

Группа $\check{\Gamma}^1_{p,q} = \tilde{\Gamma}^1_{p,q}$ – это группа Ли

$$\mathrm{ad}_T(U) = TUT^{-1}, \qquad U \in \mathcal{G}_{p,q}, \qquad T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q}. \tag{12}$$

$$\check{\mathrm{ad}}_T(U) = \widehat{T}UT^{-1}, \qquad U \in \mathcal{G}_{p,q}, \qquad T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q}. \tag{14}$$

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T(U) = T\langle U\rangle_{(0)}T^{-1} + \widehat{T}\langle U\rangle_{(1)}T^{-1}, \qquad \forall U \in \mathcal{G}_{p,q}, \qquad T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q}. \tag{15}$$

$\Gamma^{\pm}_{p,q}$ -эквивариантные отображения

Проецирование на подпространства фиксированных рангов

Рассмотрим группы, сохраняющие подпространства фиксированных рангов $\mathcal{G}^k_{p,q}$, $k = 0, \ldots, n$, при присоединённом действии ad и скрученных присоединённых действиях $\check{\mathrm{ad}}$ и $\tilde{\mathrm{ad}}$, которые рассмотрены в работах [5, 7, 10]:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^k_{p,q} &:= \{T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q} : \quad \mathrm{ad}_T(\mathcal{G}^k_{p,q}) := T\mathcal{G}^k_{p,q}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^k_{p,q}\}, && (64)\\
\check{\Gamma}^k_{p,q} &:= \{T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q} : \quad \check{\mathrm{ad}}_T(\mathcal{G}^k_{p,q}) := \widehat{T}\mathcal{G}^k_{p,q}T^{-1} \subseteq \mathcal{G}^k_{p,q}\}, && (65)\\
\tilde{\Gamma}^k_{p,q} &:= \{T \in \mathcal{G}^{\times}_{p,q} : \quad \tilde{\mathrm{ad}}_T(\mathcal{G}^k_{p,q}) \subseteq \mathcal{G}^k_{p,q}\}. && (66)
\end{aligned}
$$

Заметим, что

$$
\tilde{\Gamma}^k_{p,q} = \begin{cases} \check{\Gamma}^k_{p,q}, & k \text{ – нечётное,} \\ \Gamma^k_{p,q}, & k \text{ – чётное.} \end{cases} \qquad (67)
$$

Группа $\Gamma^1_{p,q}$ – это группа Клиффорда $\Gamma_{p,q}$.
Группа $\check{\Gamma}^1_{p,q} = \tilde{\Gamma}^1_{p,q}$ – это группа Липшица $\Gamma^{\pm}_{p,q}$.

В [5, 10] доказано:

$$
\Gamma^{\pm}_{p,q} \subseteq \check{\Gamma}^m_{p,q}, \qquad \Gamma_{p,q} \subseteq \Gamma^m_{p,q}, \qquad \forall m = 0, 1, \ldots, n.
$$

$\Gamma^{\pm}_{p,q}$ -эквивариантные отображения

Проецирование на подпространства фиксированных рангов

Теорема 4 *Следующие утверждения эквивалентны:*

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T \langle x \rangle_m = \langle \tilde{\mathrm{ad}}_T x \rangle_m, \quad \forall T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}, \quad \forall x \in \mathcal{G}_{p,q} \qquad \Leftrightarrow \qquad \Gamma^{\pm}_{p,q} \subseteq \begin{cases} \check{\Gamma}^m_{p,q}, & m \text{ -- нечётное}, \\ \Gamma^m_{p,q}, & m \text{ -- чётное}, \end{cases} \tag{71}$$

где $m = 0, 1, \ldots, n$.

$\Gamma^{\pm}_{p,q}$ -эквивариантные отображения

Проецирование на подпространства фиксированных рангов

Теорема 4 *Следующие утверждения эквивалентны:*

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T\langle x\rangle_m = \langle \tilde{\mathrm{ad}}_T x\rangle_m, \quad \forall T\in\Gamma^{\pm}_{p,q}, \quad \forall x\in\mathcal{G}_{p,q} \qquad \Leftrightarrow \qquad \Gamma^{\pm}_{p,q}\subseteq \begin{cases} \check{\Gamma}^m_{p,q}, & m \text{ – нечётное},\\ \Gamma^m_{p,q}, & m \text{ – чётное},\end{cases} \tag{71}$$

где $m = 0, 1, \ldots, n$.

Доказательство. Из левого утверждения (71) следует правое, так как для $T\in\Gamma^{\pm}_{p,q}$ имеем

$$T\langle x\rangle_m T^{-1}\in\mathcal{G}^m_{p,q}, \quad m \text{ – чётное}; \qquad \widehat{T}\langle x\rangle_m T^{-1}\in\mathcal{G}^m_{p,q}, \quad m \text{ – нечётное}, \tag{72}$$

то есть

$$T\mathcal{G}^m_{p,q}T^{-1}\subseteq\mathcal{G}^m_{p,q,r}, \quad m \text{ – чётное}; \qquad \widehat{T}\mathcal{G}^m_{p,q}T^{-1}\subseteq\mathcal{G}^m_{p,q,r}, \quad m \text{ – нечётное}. \tag{73}$$

$\Gamma^{\pm}_{p,q}$ -эквивариантные отображения

Проецирование на подпространства фиксированных рангов

Теорема 4 *Следующие утверждения эквивалентны:*

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T\langle x\rangle_m = \langle \tilde{\mathrm{ad}}_T x\rangle_m, \quad \forall T\in\Gamma^{\pm}_{p,q}, \quad \forall x\in\mathcal{G}_{p,q} \qquad \Leftrightarrow \qquad \Gamma^{\pm}_{p,q}\subseteq\begin{cases}\check{\Gamma}^m_{p,q}, & m \text{ – нечётное,}\\ \Gamma^m_{p,q}, & m \text{ – чётное,}\end{cases} \tag{71}$$

где $m=0,1,\ldots,n$.

Доказательство. Из левого утверждения (71) следует правое, так как для $T\in\Gamma^{\pm}_{p,q}$ имеем

$$T\langle x\rangle_m T^{-1}\in\mathcal{G}^m_{p,q}, \quad m \text{ – чётное;} \qquad \widehat{T}\langle x\rangle_m T^{-1}\in\mathcal{G}^m_{p,q}, \quad m \text{ – нечётное,} \tag{72}$$

то есть

$$T\mathcal{G}^m_{p,q}T^{-1}\subseteq\mathcal{G}^m_{p,q,r}, \quad m \text{ – чётное;} \qquad \widehat{T}\mathcal{G}^m_{p,q}T^{-1}\subseteq\mathcal{G}^m_{p,q,r}, \quad m \text{ – нечётное.} \tag{73}$$

$$\Gamma^m_{p,q} := \{T\in\mathcal{G}^{\times}_{p,q}: \quad T\mathcal{G}^m_{p,q}T^{-1}\subseteq\mathcal{G}^m_{p,q}\}$$

$$\check{\Gamma}^m_{p,q} := \{T\in\mathcal{G}^{\times}_{p,q}: \quad \widehat{T}\mathcal{G}^m_{p,q}T^{-1}\subseteq\mathcal{G}^m_{p,q}\}$$

$\Gamma^{\pm}_{p,q}$ -эквивариантные отображения

Проецирование на подпространства фиксированных рангов

Теорема 4 *Следующие утверждения эквивалентны:*

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T\langle x\rangle_m = \langle\tilde{\mathrm{ad}}_T x\rangle_m, \quad \forall T\in\Gamma^{\pm}_{p,q}, \quad \forall x\in\mathcal{G}_{p,q} \qquad \Leftrightarrow \qquad \Gamma^{\pm}_{p,q}\subseteq\begin{cases}\check{\Gamma}^m_{p,q}, & m \text{ -- нечётное},\\ \Gamma^m_{p,q}, & m \text{ -- чётное},\end{cases} \tag{71}$$

Докажем, что из правого утверждения (71) следует левое. Пусть $T\in\Gamma^{\pm}_{p,q}$, тогда для любого $m=0,\ldots,n$ получаем

$$\begin{aligned}
\langle\tilde{\mathrm{ad}}_T x\rangle_m &= \langle T\langle x\rangle_{(0)}T^{-1}+\widehat{T}\langle x\rangle_{(1)}T^{-1}\rangle_m && (74)\\
&= \langle T\langle x\rangle_0 T^{-1}+T\langle x\rangle_2 T^{-1}+\cdots+\widehat{T}\langle x\rangle_1 T^{-1}+\widehat{T}\langle x\rangle_3 T^{-1}+\cdots\rangle_m && (75)\\
&= \langle T\langle x\rangle_0 T^{-1}\rangle_m+\langle T\langle x\rangle_2 T^{-1}\rangle_m+\cdots+\langle\widehat{T}\langle x\rangle_1 T^{-1}\rangle_m+\langle\widehat{T}\langle x\rangle_3 T^{-1}\rangle_m+\cdots && (76)\\
&= \begin{cases}\langle T\langle x\rangle_m T^{-1}\rangle_m = T\langle x\rangle_m T^{-1}, & m \text{ -- чётное},\\ \langle\widehat{T}\langle x\rangle_m T^{-1}\rangle_m = \widehat{T}\langle x\rangle_m T^{-1}, & m \text{ -- нечётное},\end{cases} && (77)\\
&= \tilde{\mathrm{ad}}_T\langle x\rangle_m, && (78)
\end{aligned}$$

где в (77) мы используем $\langle x\rangle_{(0)}=\langle x\rangle_0+\langle x\rangle_2+\cdots$, $\langle x\rangle_{(1)}=\langle x\rangle_1+\langle x\rangle_3+\cdots$; в (76) мы пользуемся линейностью проекции, в (77) мы применяем правую часть (71). ■

$\Gamma^{\pm}_{p,q}$ -эквивариантные отображения

Пример 3. Рассмотрим следующую функцию от двух мультивекторов $x, y \in \mathcal{G}_{p,q}$ при некотором фиксированном $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$F(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \phi_{ij} \langle \langle x \rangle_i \langle y \rangle_j \rangle_k, \qquad \phi_{ij} \in \mathbb{R}. \tag{79}$$

Проверим, что эта функция экивариантна по отношению к группе Липшица, т.е. что

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T(F(x, y)) = F(\tilde{\mathrm{ad}}_T(x), \tilde{\mathrm{ad}}_T(y)), \qquad \forall T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}. \tag{80}$$

$\Gamma^{\pm}_{p,q}$ -эквивариантные отображения

Пример 3. Рассмотрим следующую функцию от двух мультивекторов $x, y \in \mathcal{G}_{p,q}$ при некотором фиксированном $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$F(x,y) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \phi_{ij}\langle\langle x\rangle_i\langle y\rangle_j\rangle_k, \qquad \phi_{ij} \in \mathbb{R}. \tag{79}$$

Мы имеем

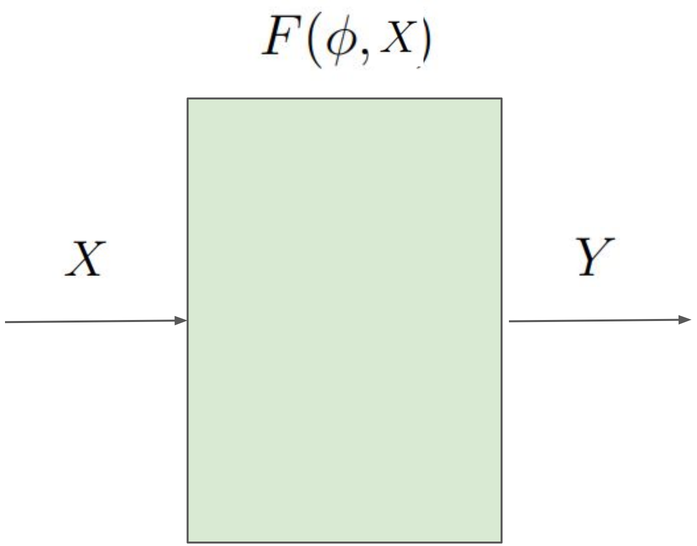
$$\begin{aligned}
\tilde{\mathrm{ad}}_T(F(x,y)) &= \tilde{\mathrm{ad}}_T\Big(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \phi_{ij}\langle\langle x\rangle_i\langle y\rangle_j\rangle_k\Big) && (81)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \phi_{ij}\cdot \tilde{\mathrm{ad}}_T\Big(\langle\langle x\rangle_i\langle y\rangle_j\rangle_k\Big) && (82)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \phi_{ij}\cdot \langle\tilde{\mathrm{ad}}_T\Big(\langle x\rangle_i\langle y\rangle_j\Big)\rangle_k && (83)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \phi_{ij}\cdot \langle\tilde{\mathrm{ad}}_T\Big(\langle x\rangle_i\Big)\tilde{\mathrm{ad}}_T\Big(\langle y\rangle_j\Big)\rangle_k && (84)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \phi_{ij}\cdot \langle\langle\tilde{\mathrm{ad}}_T x\rangle_i\langle\tilde{\mathrm{ad}}_T y\rangle_j\rangle_k = F(\tilde{\mathrm{ad}}_T(x), \tilde{\mathrm{ad}}_T(y)). && (85)
\end{aligned}$$

2.3.

Методология построения Clifford Group Equivariant Neural Networks

- структура слоев
- функции активации на слоях

Структура нейронной сети

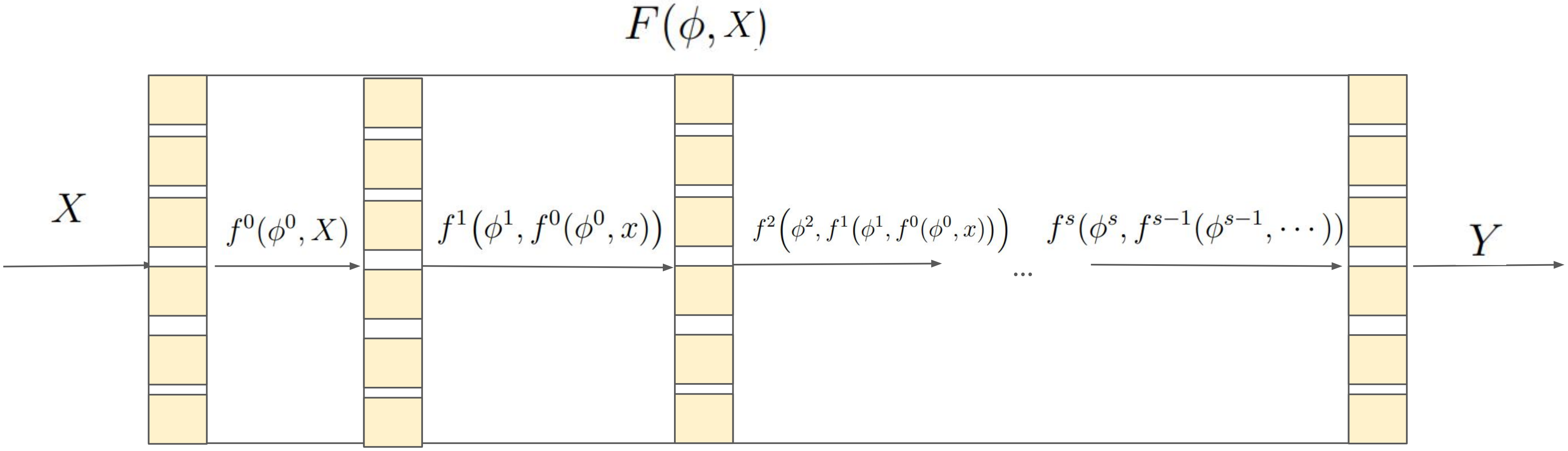


$F(\phi, X)$ – нейронная сеть

$\phi = \left(\phi_{111}, \ldots, \phi_{ijk}, \ldots\right) \in \mathbb{R}^d$ – оптимизируемые параметры

$X = \left(x_1, \ldots, x_l\right) \qquad x_i \in \mathcal{G}_{p,q}$ – входные данные

Структура нейронной сети



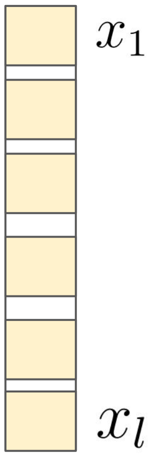
$F(\phi, X)$ – нейронная сеть

$\phi = \left(\phi_{111}, \ldots, \phi_{ijk}, \ldots\right) \in \mathbb{R}^d$ – оптимизируемые параметры

$X = \left(x_1, \ldots, x_l\right) \qquad x_i \in \mathcal{G}_{p,q}$ – входные данные

Входные данные

$X = \left(x_1, \ldots, x_l\right)$ $\quad x_i \in \mathcal{G}_{p,q}$ – входные данные



В примерах из статьи:

$x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{G}^0_{p,q}$ – числовые и категориальные признаки

$x_{k+1}, \ldots, x_l \in \mathcal{G}^1_{p,q}$ – координаты точки, координаты вектора

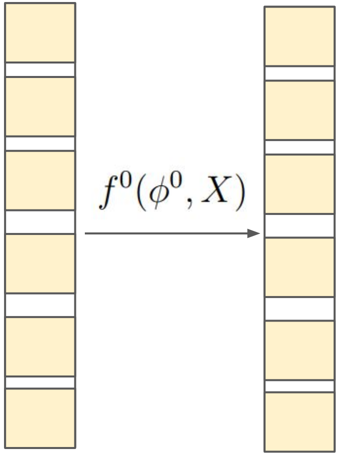
Линейный слой

Пусть $x_1, \ldots, x_l \in \mathcal{G}_{p,q}$ – входные мультивекторы, где l – количество входных каналов.
Линейный слой может быть составлен с помощью

$$y^k_{c_{out}} := \langle y_{c_{out}} \rangle_k := \sum_{c_{in}=1}^{l} \phi_{c_{in} c_{out} k} \langle x_{c_{in}} \rangle_k,$$

где $\phi_{c_{in} c_{out} k} \in \mathbb{R}$ – обучаемые параметры,
c_{in} и c_{out} – количество входных и выходных каналов.

Другими словами, для любого $k = 0, \ldots, n$, значение $y^k_{c_{out}}$
является линейной комбинацией $\langle x_{c_{in}} \rangle_k$, где $c_{in} = 1, \ldots, l$.

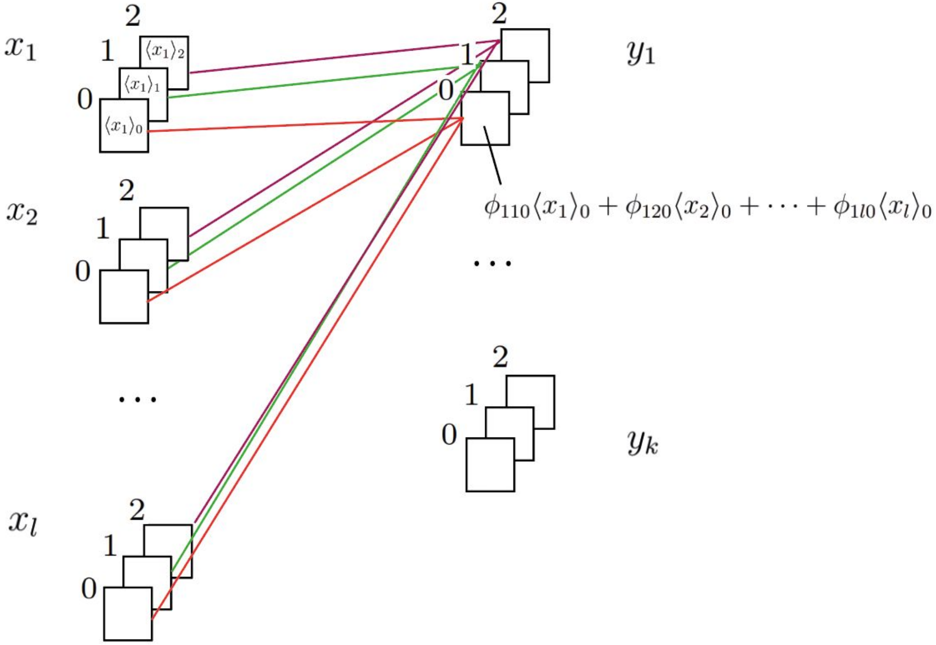


Линейный слой

Пусть $x_1, \ldots, x_l \in \mathcal{G}_{p,q}$ – входные мультивекторы, где l – количество входных каналов. Линейный слой может быть составлен с помощью

$$y_{c_{out}}^k := \langle y_{c_{out}} \rangle_k := \sum_{c_{in}=1}^{l} \phi_{c_{in} c_{out} k} \langle x_{c_{in}} \rangle_k,$$

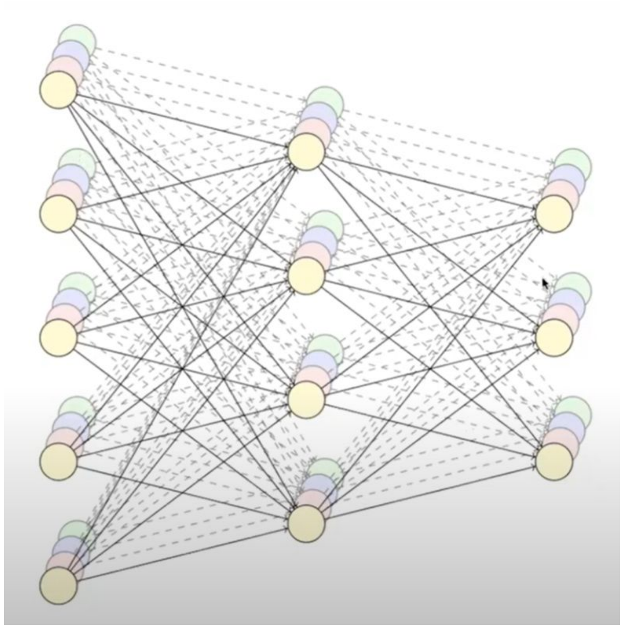
где $\phi_{c_{in} c_{out} k} \in \mathbb{R}$ – обучаемые параметры,
c_{in} и c_{out} – количество входных и выходных каналов.

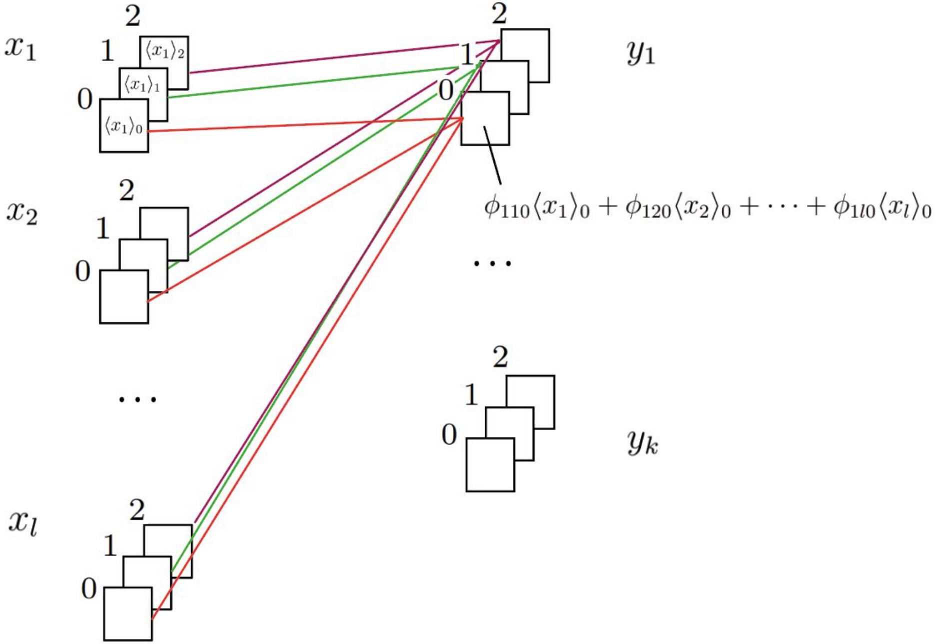


Линейный слой

Пусть $x_1, \ldots, x_l \in \mathcal{G}_{p,q}$ – входные мультивекторы, где l – количество входных каналов. Линейный слой может быть составлен с помощью

$$y^k_{c_{out}} := \langle y_{c_{out}} \rangle_k := \sum_{c_{in}=1}^{l} \phi_{c_{in} c_{out} k} \langle x_{c_{in}} \rangle_k,$$





Линейный слой

Пусть $x_1, \ldots, x_l \in \mathcal{G}_{p,q}$ – входные мультивекторы, где l – количество входных каналов. Линейный слой может быть составлен с помощью

$$y_{c_{out}}^k := \langle y_{c_{out}} \rangle_k := \sum_{c_{in}=1}^{l} \phi_{c_{in} c_{out} k} \langle x_{c_{in}} \rangle_k,$$

Такие слои являются $\Gamma_{p,q}^{\pm}$-эквивариантными по Лемме 3 и Теореме 3, так как мы применяем линейные преобразования подпространств $\mathcal{G}_{p,q}^k$ и проекции на $\mathcal{G}_{p,q}^k$.

Лемма 3 *[Corollary 3.4 [8]. Все многочлены эквивариантны по отношению к группе Липшица.] Пусть $T \in \Gamma^{\pm}$ и $F \in \mathbb{R}[T_1, \ldots, T_l]$ – многочлен от l переменных с коэффициентами в $\mathbb{R}$. Рассмотрим l мультивекторов $x_1, \ldots, x_l \in \mathcal{G}_{p,q}$. Имеем следующее эквивариантное свойство:*

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T(F(x_1, \ldots, x_l)) = F(\tilde{\mathrm{ad}}_T(x_1), \ldots, \tilde{\mathrm{ad}}_T(x_l)). \tag{56}$$

Теорема 3 *[Corollary 3.3] Пусть $T \in \Gamma_{p,q}^{\pm}$ и $x \in \mathcal{G}_{p,q}$. Выполняется эквивариантное свойство:*

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T \langle x \rangle_m = \langle \tilde{\mathrm{ad}}_T x \rangle_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, n. \tag{61}$$

Слой геометрического произведения

Параметризуем произведения мультивекторов.

Рассматриваем только произведения двух элементов, поскольку произведения более высоких порядков будут получаться за счет нескольких слоев геометрического произведения.

Проекция произведения произвольных мультивекторов x_1 и x_2 на подпространство $\mathcal{G}^k_{p,q}$, $k = 0, \ldots, n$, имеет вид

$$\langle x_1 x_2 \rangle_k = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \langle \langle x_1 \rangle_i \langle x_2 \rangle_j \rangle_k. \qquad x_1, x_2 \in \mathcal{G}_{p,q}$$

Тогда можно запараметризовать проекцию произведения x_1 и x_2 на $\mathcal{G}^k_{p,q}$ в следующем виде:

$$P(x_1, x_2)^k := \langle P(x_1, x_2) \rangle_k := \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \phi_{ijk} \langle \langle x_1 \rangle_i \langle x_2 \rangle_j \rangle_k,$$

где $\phi_{ijk} \in \mathbb{R}$ – обучаемые параметры.

Слой геометрического произведения

Тогда можно запараметризовать проекцию произведения x_1 и x_2 на $\mathcal{G}^k_{p,q}$ в следующем виде:

$$P(x_1, x_2)^k := \langle P(x_1, x_2)\rangle_k := \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \phi_{ijk}\langle\langle x_1\rangle_i\langle x_2\rangle_j\rangle_k,$$

где $\phi_{ijk} \in \mathbb{R}$ – обучаемые параметры.

Отображение $P(x_1, x_2)^k$ является $\Gamma^{\pm}_{p,q}$-эквивариантным по Лемме 3 и Теореме 3.

Лемма 3 *[Corollary 3.4 [8]. Все многочлены эквивариантны по отношению к группе Липшица.] Пусть $T \in \Gamma^{\pm}$ и $F \in \mathbb{R}[T_1, \ldots, T_l]$ – многочлен от l переменных с коэффициентами в $\mathbb{R}$. Рассмотрим l мультивекторов $x_1, \ldots, x_l \in \mathcal{G}_{p,q}$. Имеем следующее эквивариантное свойство:*

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T(F(x_1, \ldots, x_l)) = F(\tilde{\mathrm{ad}}_T(x_1), \ldots, \tilde{\mathrm{ad}}_T(x_l)). \tag{56}$$

Теорема 3 *[Corollary 3.3] Пусть $T \in \Gamma^{\pm}_{p,q}$ и $x \in \mathcal{G}_{p,q}$. Выполняется эквивариантное свойство:*

$$\tilde{\mathrm{ad}}_T\langle x\rangle_m = \langle\tilde{\mathrm{ad}}_T x\rangle_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, n. \tag{61}$$

Слой геометрического произведения

Тогда можно запараметризовать проекцию произведения x_1 и x_2 на $\mathcal{G}_{p,q}^k$ в следующем виде:

$$P(x_1, x_2)^k := \langle P(x_1, x_2) \rangle_k := \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \phi_{ijk} \langle \langle x_1 \rangle_i \langle x_2 \rangle_j \rangle_k,$$

где $\phi_{ijk} \in \mathbb{R}$ – обучаемые параметры.

Получаем $(n+1)^3$ параметров ϕ_{ijk} для геометрического произведения одной пары мультивекторов. Так как всего есть l^2 возможных пар мультивекторов при l входных каналах, то параметризация такого количества коэффициентов может быть слишком дорогой с вычислительной точки зрения.

Слой геометрического произведения

Тогда можно запараметризовать проекцию произведения x_1 и x_2 на $\mathcal{G}_{p,q}^k$ в следующем виде:

$$P(x_1, x_2)^k := \langle P(x_1, x_2)\rangle_k := \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \phi_{ijk}\langle\langle x_1\rangle_i\langle x_2\rangle_j\rangle_k,$$

где $\phi_{ijk} \in \mathbb{R}$ – обучаемые параметры.

Если количество входных каналов l – большое,
будем считать геометрическое произведение не каждой из l^2 пар мультивекторов.

Подход 1: Выбрать некоторые пары входных мультивекторов,
для которых будем считать произведение.

Слой геометрического произведения

Тогда можно запараметризовать проекцию произведения x_1 и x_2 на $\mathcal{G}^k_{p,q}$ в следующем виде:

$$P(x_1, x_2)^k := \langle P(x_1, x_2) \rangle_k := \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \phi_{ijk} \langle \langle x_1 \rangle_i \langle x_2 \rangle_j \rangle_k,$$

где $\phi_{ijk} \in \mathbb{R}$ – обучаемые параметры.

Подход 2: Состоит из 2 шагов:

- Применяем к $x_1, \ldots, x_l \in \mathcal{G}_{p,q}$ линейное отображение и получаем новые элементы $y_1, \ldots, y_l \in \mathcal{G}_{p,q}$,
- Считаем произведения для пар x_i, y_i для $i = 1, \ldots, l$, результаты будем обозначать с помощью $z_1, \ldots, z_l$ соответственно.

При таком подходе считаем геометрические произведения l пар.

Таким образом, $z_{c_{out}}$, где $c_{out} = 1, \ldots, l$, получаются как

$$z^k_{c_{out}} := \langle z_{c_{out}} \rangle_k := P(x_{c_{in}}, y_{c_{in}})^k,$$

где $c_{in} = c_{out} = 1, \ldots, l$.

Слой геометрического произведения

Тогда можно запараметризовать проекцию произведения x_1 и x_2 на $\mathcal{G}^k_{p,q}$ в следующем виде:

$$P(x_1, x_2)^k := \langle P(x_1, x_2)\rangle_k := \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \phi_{ijk}\langle\langle x_1\rangle_i\langle x_2\rangle_j\rangle_k,$$

где $\phi_{ijk} \in \mathbb{R}$ – обучаемые параметры.

Подход 2: Состоит из 2 шагов:

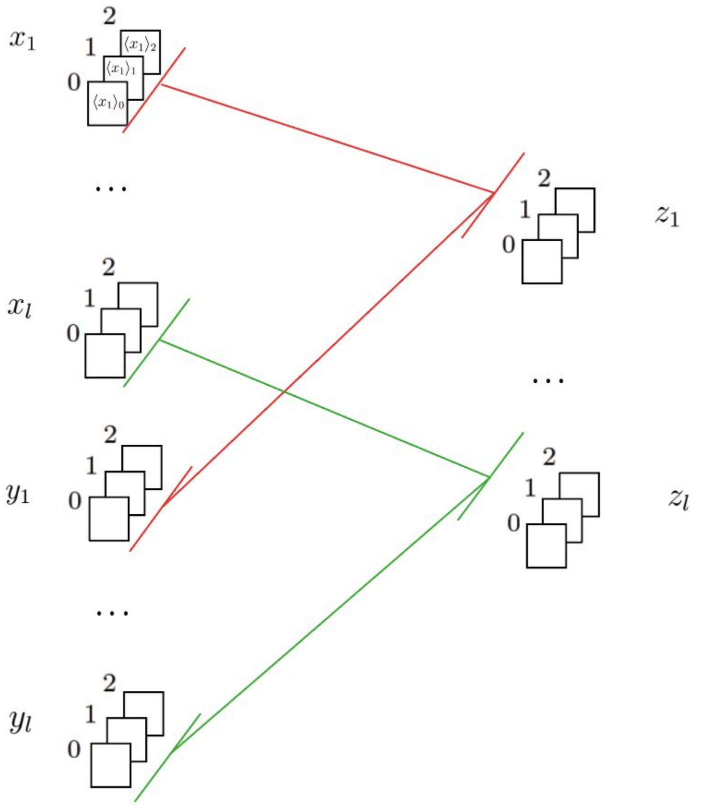
- Применяем к $x_1, \dots, x_l \in \mathcal{G}_{p,q}$ линейное отображение и получаем новые элементы $y_1, \dots, y_l \in \mathcal{G}_{p,q}$,
- Считаем произведения для пар x_i, y_i для $i = 1, \dots, l$, результаты будем обозначать с помощью $z_1, \dots, z_l$ соответственно.

При таком подходе считаем геометрические произведения l пар.

Таким образом, $z_{c_{out}}$, где $c_{out} = 1, \dots, l$, получаются как

$$z^k_{c_{out}} := \langle z_{c_{out}}\rangle_k := P(x_{c_{in}}, y_{c_{in}})^k,$$

где $c_{in} = c_{out} = 1, \dots, l$.



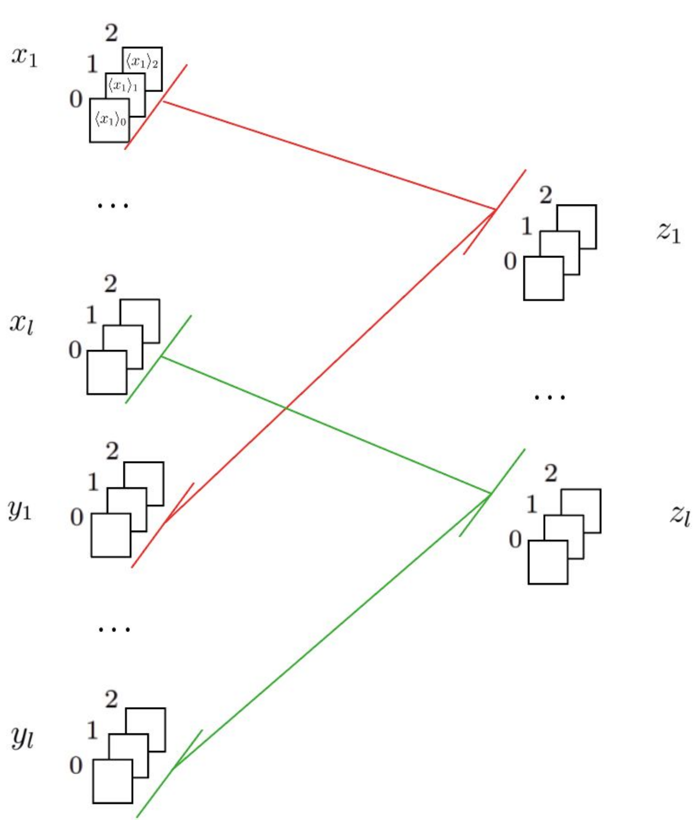
Полносвязный слой геометрического произведения

$$P(x_1, x_2)^k := \langle P(x_1, x_2) \rangle_k := \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \phi_{ijk} \langle \langle x_1 \rangle_i \langle x_2 \rangle_j \rangle_k,$$

$$z_{c_{out}}^k := \langle z_{c_{out}} \rangle_k := P(x_{c_{in}}, y_{c_{in}})^k,$$

Чтобы получить более глубокую параметризацию,
можем немного модифицировать значения $z_1, \ldots, z_l$ и брать суммы:

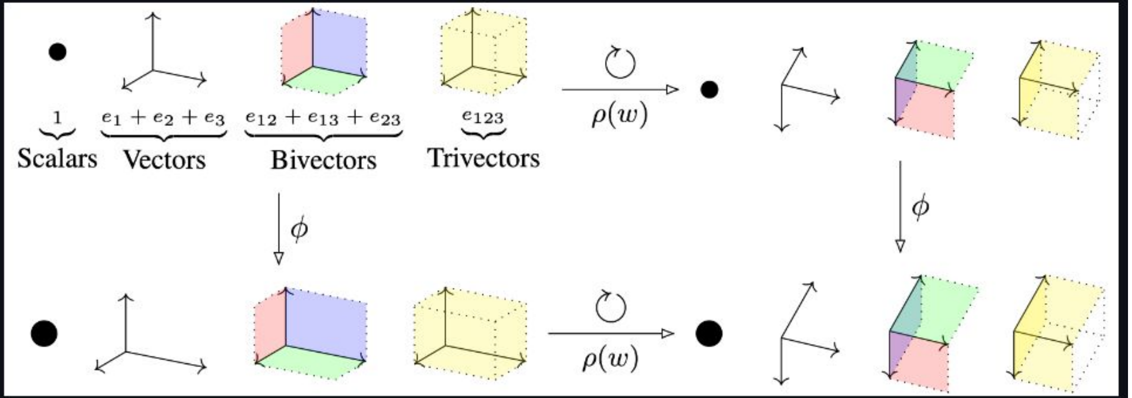
$$z_{c_{out}}^k := \langle z_{c_{out}} \rangle_k := \sum_{c_{in}=1}^{l} P(x_{c_{in}}, y_{c_{in}})^k.$$



2.4.

Эксперименты с CGENN

Clifford Group Equivariant Networks (NeurIPS 2023 Oral)



Authors: David Ruhe, Johannes Brandstetter, Patrick Forré

- Paper Link: arXiv
- Google Colaboratory Tutorial: Open in Colab
- Blog Post Series C2C:

https://github.com/DavidRuhe/clifford-group-equivariant-neural-networks

https://colab.research.google.com/drive/1J8bYuCiAAW4jWHneRvAEZFz3-kUdPsF-?usp=sharing

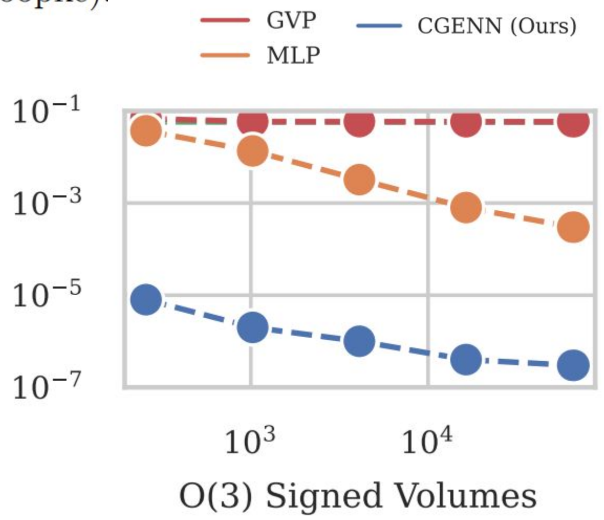
Пример 2: O(3) **Experiment: Signed Volumes**

Рассматриваем $\mathcal{G}_{3,0}$.

Объекты датасета: рандомные тетраэдры (30000 объектов в обучающей выборке). Каждый тетраэдр задается координатами 4 вершин.

Нейронная сеть предсказывает ориентированный объем, соответствующий поданному на вход тетраэдру.

В эксперименте по умолчанию оптимизируютя 48.9K параметров.



Geometric Vector Perceptrons (GVP)
Standard multilayer perceptron (MLP)