Модель Леонтьева

Юдина А.В.
2024

Содержание

1 Постановка задачи и основные понятия

Задача межотраслевого баланса

Основной задачей межотраслевого баланса является нахождение валового выпуска $\boldsymbol{x}$ при заданной матрице прямых затрат A, который обеспечивает заданный вектор конечного спроса $\boldsymbol{d}$.

Цель построения модели

Анализ перераспределения товаров между отраслями экономики, обеспечивающего такое функционирование производственного сектора, когда объем выпуска соответствует суммарному (т.е. производственному + конечному) спросу на товары.

Исходные предположения:

- В экономической системе производятся, продаются, покупаются, потребляются и инвестируются n продуктов;
- Для выпуска товара в любой отрасли необходимо использование товара хотя бы одной другой отрасли;
- Каждый товар производится только по одной производственной технологии. Все товары различны. При этом каждая отрасль является «чистой», то есть производит только один продукт, совместное производство различных продуктов исключается. Различные отрасли выпускают разные продукты;
- Под *производственным процессом* в каждой отрасли понимается преобразование некоторых типов продуктов в определенный продукт. При этом соотношение затраченных продуктов и выпускаемого предполагается **постоянным** (CRS - constant returns to scale). Таким образом, если для производства единицы j-го продукта надо затратить a_{ij} единиц i-го продукта, то выпуск m единиц j-го продукта потребует $m \cdot a_{ij}$ единиц i-го продукта;
- Величины a_{ij} называются *коэффициентами прямых затрат* или *расходными коэффициентами*. *Технологической матрицей* или *матрицей прямых затрат* называют матрицу:

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

По определению, $a_{ij} \geq 0$, следовательно, технологическая матрица является неотрицательной.

Построение технологической матрицы

Возьмем экономику, состоящую из трех отраслей: энергетики, машиностроения и строительства.

	Энергетика	Машиностроение	Строительство	Общий выпуск
Энергетика	187	155	91	975
Машиностроение	114	198	120	1041
Сфера услуг	277	173	226	1186

$$\hat{A} = [\hat{a}_{ij}] = \begin{pmatrix} 187 & 155 & 91 \\ 114 & 198 & 120 \\ 277 & 173 & 226 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 975 \\ 1041 \\ 1186 \end{pmatrix}$$

Значения $\hat{a}_{ij}$ отражают количество продукции отрасли i, используемое в отрасли j для производства x_j единиц товара. Матрица $\hat{A}$ является ненормированной. Прямые затраты a_{ij} можно найти как долю продукции отрасли i, используемую в отрасли j, $a_{ij} = \dfrac{\hat{a}_{ij}}{x_j}$. Таким образом технологическая матрица в данной задаче:

$$A = [a_{ij}] = \left[\frac{\hat{a}_{ij}}{x_j}\right] = \begin{pmatrix} \frac{187}{975} & \frac{155}{1041} & \frac{91}{1186} \\ \frac{114}{975} & \frac{198}{1041} & \frac{120}{1186} \\ \frac{277}{975} & \frac{173}{1041} & \frac{226}{1186} \end{pmatrix}$$

Статическая модель Леонтьева

Пусть вся экономика состоит из n отраслей, каждая из которых производит свой вид продукции. x_i - это общий выпуск i-й отрасли.

Предполагается, что определенная доля выпуска каждой отрасли расходуется, во-первых, в непроизводственной сфере, а, во-вторых, используется в качестве ресурсов производства в других отраслях экономики.

d_i – объем потребления продукции i-ой отрасли в непроизводственной сфере,

a_{ij} - доля выпуска i-й отрасли потребляемая j-й отраслью.

Условия рыночного равновесия означает, что **спрос на продукцию отрасли должен равняться предложению отрасли**. В форме уравнений это выглядит следующим образом:

$$x_i = d_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = d_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\hat{a}_{ij}}{x_j}x_j = d_i + \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_{ij}$$

Здесь левая часть отражает выпуск, а правая – затраты и конечный спрос.

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – вектор выпуска, $\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, ..., d_n)$ – вектор конечного спроса (вектор потребления в непроизводственной сфере), $A_{n\times n} = [a_{ij}]$ – производственная матрица.

Тогда *условие равновесия* примет вид: $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}$. Данную систему уравнений называют *системой уравнений Леонтьева* (статической моделью экономики Леонтьева).

Предположим, что у нас задана технологическая матрица A и вектор конечного спроса $\boldsymbol{d}$, тогда вектор выпуска $\boldsymbol{x}$ (валовый выпуск) можно найти следующим образом:

$$\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d} \Rightarrow (I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d} \Rightarrow \boldsymbol{x} = (I - A)^{-1}\boldsymbol{d}$$

Заметим, что решение будет **единственным**. Единственность решения подтверждается тем, что матрица A является матрицей полного ранга (так как (1) продукты различны и характеризуются технологией производста, и (2) совместное производство различных продуктов исключается, то есть столбцы матрицы A ЛНЗ), что гарантирует существование и единственность матрицы $(I - A)^{-1}$.

2 Предположения модели

(A1) Для выпуска товара в любой отрасли необходимо использование товара хотя бы одной другой отрасли $\Rightarrow$ Матрица A квадратная;

(A2) Соотношение затраченных продуктов и выпускаемого предполагается **постоянным** (CRS - constant returns to scale);

(A3) Каждая отрасль является «чистой», то есть производит только один продукт, совместное производство различных продуктов исключается. Различные отрасли выпускают разные продукты.

(A4) Производственные технологии каждой отрасли позволяют рационально использовать свою продукцию.

Последнее предположение не фигурировало ранее, тем не менее оно является естественным и позволяет избежать ряд проблем с возникновением отрицательного валового выпуска x_i. Также заметим, что $a_{ij} = \dfrac{\hat{a}_{ij}}{x_j} \Rightarrow a_{ij} \geq 0$.

Следовательно:

- $\forall i,j, a_{ij} \geq 0 \land \forall j, \exists i : a_{ij} > 0 \Rightarrow$ матрица A неотрицательная;
- Каждый товар производится только по одной производственной технологии $\Rightarrow$ матрица $A_{n\times n}$ квадратная;
- Исключается совместное производство различных продуктов;
- Отдача от масштаба является постоянной (CRS) $\Rightarrow$ матрица A остается неизменной при изменении вектора $\boldsymbol{x}$;
- (A4) $\Rightarrow \forall i, a_{ii} < 1$.

Несмотря на то, что предположение (A4) позволяет решить часть проблем с отрицательным валовым выпуском, рациональности в использовании собственной продукции недостаточно. К продуктивным матрицам принято предъявлять более сильное условие.

(A5) Коэффициеты матрицы должны быть продуктивными, $\exists \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0} : \boldsymbol{x} > A\boldsymbol{x}$.

Определение 2.1: Продуктивная матрица

Неотрицательная матрица A является продуктивной тогда и только тогда, когда

$$\exists \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0} : \boldsymbol{x} > A\boldsymbol{x}.$$

При выполнении всех пяти условий система $A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{x}$ тоже называется продуктивной.

3 Неотрицательные решения и их свойства

Лемма 3.1

Пусть $\boldsymbol{x}^1 \geq \boldsymbol{x}^2$ и матрица A неотрицательная, тогда $A\boldsymbol{x}^1 \geq A\boldsymbol{x}^2$.

Доказательство 3.1

Пусть $\boldsymbol{a}_i$ – i-ая строка матрицы A, тогда $\forall i$,

$$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x}^1 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k^1, \qquad \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k^2.$$

Так как матрица A неотрицительная $a_{ij} \geq 0$. Поэтому $\forall i$,

$$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{a}_i\boldsymbol{x}^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k^1 - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x_k^1 - x_k^2) \geq 0$$

Следовательно $A\boldsymbol{x}^1 \geq A\boldsymbol{x}^2$. $\square$

Лемма 3.2

Если матрица A является продуктивной, то при $s \to \infty$ все элементы матрицы A^s сходятся к 0.

Доказательство 3.2

Согласно определению продуктивной матрицы $\exists \boldsymbol{x} > \mathbf{0} : \boldsymbol{x} > A\boldsymbol{x} \geq 0$. Тогда найдется $\lambda \in (0, 1) : \lambda\boldsymbol{x} > A\boldsymbol{x} \geq 0$. Домножим прошлое выражение на A и воспользуемся Леммой 2.1,

$$\lambda(A\boldsymbol{x}) > A(A\boldsymbol{x}) = A^2\boldsymbol{x} \geq 0.$$

Теперь домножим $\lambda\boldsymbol{x} > A\boldsymbol{x} \geq 0$ на λ,

$$\lambda^2\boldsymbol{x} > \lambda A\boldsymbol{x} \geq 0.$$

Таким образом получаем

$$\lambda^2\boldsymbol{x} > \lambda A\boldsymbol{x} > A^2\boldsymbol{x} \geq 0 \Rightarrow \lambda^2\boldsymbol{x} > A^2\boldsymbol{x} \geq 0.$$

Повторяя прошлые шаги получаем $\lambda^s\boldsymbol{x} > A^s\boldsymbol{x} \geq 0$. Если $s \to +\infty$, то $\lambda^s \to 0$ $(0 < \lambda < 1)$, следовательно, $\lim\limits_{s\to+\infty} A^s\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, что эквивалентно $\forall i, \lim\limits_{s\to+\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^s x_j = 0$, где a_{ij}^s есть элемент матрицы A^s. Согласно (A5) $\forall j, x_j > 0$, поэтому прошлое утверждение верно тогда и только тогда, когда $\forall i, j, \lim\limits_{s\to+\infty} a_{ij}^s = 0$. $\square$

Лемма 3.3

Если A – продуктивная матрица и для некоторого $\boldsymbol{x}$ верно, что $\boldsymbol{x} \geq A\boldsymbol{x}$, тогда $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$.

Доказательство 3.3

Пусть $\boldsymbol{x} \geq A\boldsymbol{x}$. Тогда согласно Лемме 3.1, последовательно домножая на матрицу A $(s-1)$ раз, получаем:

$$\boldsymbol{x} \geq A\boldsymbol{x} \geq A^2\boldsymbol{x} \geq ... \geq A^s\boldsymbol{x} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} \geq A^s\boldsymbol{x}.$$

Согласно Лемме 3.2 при $s \to +\infty$, $A^s \to \mathbf{0}$.
Применим к полученному ранее неравенству $\boldsymbol{x} \geq A^s\boldsymbol{x} \to \mathbf{0}$, следовательно, $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$. $\square$

Лемма 3.4: Свойство 4

Если A – продуктивная матрицая, то $det(I - A) \neq 0$.

Доказательство 3.4

Предположим обратное, пусть $det(I - A) = 0$. Тогда некоторые столбцы матрицы $(I - A)$ ЛЗ, следовательно $\exists \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0} : (I - A)\boldsymbol{x} = 0$, что эквивалентно $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$. Согласно Лемме 3.3 знаем, что $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$.
Теперь возьмем вектор $(-\boldsymbol{x})$. Очевидно, что он тоже удовлетворяет $(I - A)(-\boldsymbol{x}) = 0$. Согласно Лемме 3.3 $(-\boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0}$.

Таким образом одновременно должно быть верно и $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$, и $(-\boldsymbol{x}) \geq \mathbf{0}$, следовательно, $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, что противоречит исходному предположению $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$. □

Теорема 3.1: О существовании и единственности решения

Пусть $\boldsymbol{d} \geq \mathbf{0}$, тогда система $(I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ имеет единственное неотрицательной решение $\boldsymbol{x}$, если матрица A является продуктивной.
Причем если система $(I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ имеет единственное неотрицательное решение $\boldsymbol{x}$ при $\boldsymbol{d} > \mathbf{0}$, то матрица A продуктивная.

Доказательство 3.5

Пусть матрица A является продуктивной. Тогда согласно Лемме 3.4 имеем $det(I - A) \neq 0$. Следовательно, система $(I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ имеет единственное решение $\boldsymbol{x}$.
Возьмем любой неотрицательный вектор $\boldsymbol{d}$. Таким образом имеем $(I - A)\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$. По Лемме 3.3 получаем, что $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$.
Заметим, что если система $(I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ имеет неотрицательное решение $\boldsymbol{x}$ при $\boldsymbol{d} > 0$, то $\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} = (I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d} > 0$, то есть $\boldsymbol{x} > A\boldsymbol{x}$, следовательно матрица A продуктивная. □

Теорема 3.2: Эквивалентные условия продуктивности матрицы

Пусть A – неотрицательная матрица, тогда следующие условия являются эквивалентными:

1) A продуктивная;
2) Матрица $(I - A)^{-1}$ существует и является неотрицательной;
3) Все угловые миноры матрицы Леонтьева $B = I - A$ положительные (*условие Хокинса-Саймона*).

Доказательство 3.6

Докажем, что из (1) следует (2). Пусть матрица A продуктивная, тогда согласно Лемме 3.4 существует матрица $(I-A)^{-1}$. Пусть $\varepsilon_s = I + A + A^2 + ... + A^s$, тогда $A\varepsilon_s = A + A^2 + A^3 + ... + A^{s+1}$. Следовательно, $(I - A)\varepsilon_s = I + A + A^2 + ... + A^s - A - A^2 - A^3 - ... - A^{s+1} = I - A^{s+1}$. Так как $\lim\limits_{s\to\infty} A^{s+1} = 0$ по Лемме 3.2, то $\lim\limits_{s\to\infty}[(I - A)\varepsilon_s] = I$, следовательно $\varepsilon_s \to (I - A)^{-1}$. Заметим, что так как $A \geq 0$, то верно $\varepsilon_s \geq 0$ и $(I - A)^{-1} \geq 0$.
Покажем, что из (2) следует (1). Пусть $(I-A)^{-1} \geq 0$. Возьмем любой вектор $\boldsymbol{d} > 0$. Тогда система $(I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ имеет единственное неотрицательное решение $\boldsymbol{x} = (I - A)^{-1}\boldsymbol{d} \geq \mathbf{0}$, следовательно, из доказательства Теоремы 3.1 получаем, что A продуктивная.
Покажем, что из (1) следует (3). Пусть матрица A продуктивная, тогда $\exists \boldsymbol{x} > 0 : \boldsymbol{x} > A\boldsymbol{x}$, следовательно, $(I - A)\boldsymbol{x} > 0$. Пусть $B = I - A = [b_{ij}]$, тогда условие $(I - A)\boldsymbol{x} > 0$ эквивалентно $\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}x_j > 0$ $(\forall i)$. Так как $b_{ij} \leq 0$ при $i \neq j$ и $\forall i, b_{ii} > 0$, то из $\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}x_j > 0$ следует, что $\forall i, k = i, \sum\limits_{j=1}^{k} b_{ij}x_j > 0$. Таким образом $\forall k$, матрица A_k является продуктивной, следовательно, $det(B_k) \neq 0$ по Лемме 3.4, где

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{pmatrix}.$$

Теперь устремим все элементы b_{ij} $(i \neq j)$ к нулю. Очевидно, что при этом полученное условие $det(B_k) \neq 0$ сохранится, а значит $det(B_k)$ останется того же знака, что и до изменения b_{ij} $(i \neq j)$. Так как $\forall i, b_{ii} > 0$ и в пределе $b_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, то верно $det(B_k) > 0$. Значит $\forall k, det(B_k) > 0$ и для матриц с исходными b_{ij} $(i \neq j)$ тоже.

Покажем, что из (3) следует (1). Докажем, что матрица A продуктивная через Теорему 3.1. Для этого покажем по индукции, что при $\boldsymbol{d} > \boldsymbol{0}$ система $(I-A)\boldsymbol{x}$ имеет единственное неотрицательное решение. Для $n = 1, b_{11}x_1 = d_1$. Мы знаем, что $det(B_1) = b_{11} > 0$, следовательно, $\forall d_1 > 0, \exists! x_1 : x_1 \geq 0 \wedge b_{11}x_1 = d_1$. Предположим, что это верно для $n-1$. Докажем, что наше предположение верно для n. Имеем $\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}x_j = d_i$, так как $b_{11} > 0$ $(\neq 0)$ мы можем переписать данное выражение как $\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}x_j - \left[\sum\limits_{j=1}^{n} b_{1j}x_j\right] b_{i1}/b_{11} = d_i - d_1 b_{i1}/b_{11}, \forall i = 2,...,n$. Введем обозначения: $b'_{ij} = b_{ij} - b_{1j}b_{i1}/b_{11}$ и $d'_i = d_i - d_1 b_{i1}/b_{11}$, $\forall i = 2,..., n, j = 2,..., n$. Таким образом мы получаем $\sum\limits_{j=2}^{n} b'_{ij}x_j = d'_i$, $i = 2,...,n$, причем $b'_{11} = d'_1 = 0$.

$$det(B_k) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b'_{12} & \cdots & b'_{1k} \\ 0 & b'_{22} & \cdots & b'_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b'_{k2} & \cdots & b'_{kk} \end{vmatrix} = b_{11} \begin{vmatrix} b'_{22} & \cdots & b'_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b'_{k2} & \cdots & b'_{kk} \end{vmatrix} = b_{11} \cdot det(B'_k) > 0$$

Так как $b_{11} > 0$ и $det(B_k) > 0$, то $det(B'_k) > 0$. Таким образом $\sum\limits_{j=2}^{n} b'_{ij}x_j = d'_i$ имеет единственное неотрицательное решение $(x_2,...,x_n)$ при $(d'_2,...,d'_n) > 0$. Заметим, что x_1 тоже больше нуля, так как $x_1 = \left[d_1 - \sum\limits_{j=2}^{n} b_{1j}x_j\right]/b_{11}$, где $b_{1j} < 0$ $(j \neq 1)$, $b_{11} > 0$, $d_1 > 0$, $x_j > 0$ $(j = 2,...,n)$. Получили, что система $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ имеет единственное неотрицательное решение $\boldsymbol{x}$, следовательно, матрица A продуктивная. $\square$

4 Условия получения значимых с точки зрения экономики решений

Как известно, в экономике отрицательные решения не имеют смысла. Более того, просто неотрицательности недостаточно для экономической обоснованности решения модели Леонтьева. Адекватное решение должно присваивать положительный выпуск всем имеющимся благам (блага, которые не требуются для производства других товаров и не поставляются для конечного потребления, можно опустить).

Определение 4.1: Неразложимая матрица

Матрица $A_{n \times n}$ называется *неразложимой*, если одноверменной перестановкой строк и столбцов ее нельзя привести к виду

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \mathbf{0} & A_{22} \end{vmatrix}.$$

В противном случае $A_{n\times n}$ является *разложимой*.

Лемма 4.1: Условия разложимости (неразложимости) матриц

Пусть $A_{n\times n} = [a_{ij}]$, тогда

- Матрица A разложимая тогда и только тогда, когда найдется подмножество $S = \{i_1, ..., i_n\} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ такое что $\forall i \in S, j \notin S, a_{ij} = 0$.
- Матрица A неразложимая тогда и только тогда, когда $\forall j \neq k$, найдется цепочка вида $j = i_0, i_1, ..., i_{m-1}, i_m = k$ такая что $\forall j = 1,...,n, a_{i_{j-1},i_j} \neq 0$.

Лемма 4.2: Условия неразложимости для неотрицательных матриц

Матрица $A_{n\times n} \geq 0$ является неразложимой тогда и только тогда, когда $\forall j \neq k, \exists m > 0 : a^m_{jk} > 0$, где a^m_{jk} есть элемент матрицы A^m.

Доказательство 4.1

Пусть $A^m_{n\times n} = [a^m_{jk}]$. Так как $a^2_{jk} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ji}a_{ik}$, то по индукции

$$a^m_{jk} = \sum_{i_1,...,i_{m-1}=1}^{n} a_{ji_1}a_{i_1i_2}...a_{i_{m-2}i_{m-1}}a_{i_{m-1}k}.$$

Так как $A \geq 0$, то $a^m_{jk} > 0$ тогда и только тогда, когда в приведенной выше сумме одно из слагаемых строго больше нуля. Другими словами, $\exists i_1, ..., i_{m-1} : a_{ji_1}, a_{i_1i_2}, ..., a_{i_{m-2}i_{m-1}}, a_{i_{m-1}k} > 0$, следовательно, по Лемме 4.1 матрица A неразложимая. □

Теорема 4.1: Эквивалентные условия

Пусть A – неотрицательная матрица, тогда следующие условия являются эквивалентными:

1) $\forall \boldsymbol{d} \geq \mathbf{0}$ $(\boldsymbol{d} \neq \mathbf{0})$ система $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}$ имеет положительное решение $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$;
2) Матрица $(I - A)^{-1}$ существует и является положительной;
3) Матрица A продуктивная и неразложимая.

Доказательство 4.2

Докажем, что (1) эквивалентно (2). Если выполняется (1), то для любого $\boldsymbol{d} > \mathbf{0}$ найдется $\boldsymbol{x}$ такой что $\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d} > \mathbf{0}$, следовательно, матрица A продуктивная по определению. Тогда по Теореме 3.2 существует $(I - A)^{-1}$. Пусть $\forall i = 1,...,n, \boldsymbol{d} = \boldsymbol{e}_i = (0,...,1,...,0)^T$, с 1 на i-том месте. Тогда $\boldsymbol{x}_i = (I - A)^{-1}\boldsymbol{e}_i$ есть i-ый столбец матрицы $(I - A)^{-1}$. По исходному предположению $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$, следовательно, $\forall i, \boldsymbol{x}_i > 0$, а значит $(I - A)^{-1} > \mathbf{0}$.
Если выполняется (2), то $[c_{ij}] = (I - A)^{-1} > \mathbf{0}$. Тогда для всех ненулевых $\boldsymbol{d} \geq \mathbf{0}$ система $\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$ имеет единственное решение $\boldsymbol{x}$. Причем $x_i = c_{i1}d_1 + ... + c_{in}d_n$, где хотя бы одно слагаемое больше нуля, поэтому $\forall i, x_i > 0$, следовательно, $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$.

Докажем, что условия (2) и (3) эквивалентны. Следуя похожему доказательству из Теоремы 2.2, введем $\varepsilon_s = I + A + A^2 + ... + A^s$. Тогда $\lim\limits_{s\to+\infty} \varepsilon_s = (I-A)^{-1}$. Так как с увеличением s элементы матрицы ε_s не уменьшаются, то $\forall s, \varepsilon_s \leq (I-A)^{-1}$. Из неравенства получаем, что все диагональные элементы c_{ii} матрицы $C = (I-A)^{-1}$ строго больше нуля. Кроме того все остальные элементы c_{ij} являются ненулевыми тогда и только тогда, когда элемент a_{ij}^m матрицы A^m является ненулевым ($m \geq 1$). Следовательно, по Лемме 4.2 матрица $(I-A)^{-1} > 0$ тогда и только тогда, когда A неразложимая. □

Замечание: при некоторых $\boldsymbol{d}$ разложимые матрицы могут давать положительное решение $\boldsymbol{x}$ (но не для всех $\boldsymbol{d}$).

5 Теорема Перрона-Фробениуса и ее связь с моделью Леонтьева

Использование теоремы Перрона-Фробениуса является еще одним способом получения адекватного с точки зрения экономики решения.

Теорема 5.1: Теорема о сжимающем отображении

Пусть X есть замкнутое и ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, $\varphi : X \to X$ – сжимающее отображение такое, что $\exists \varepsilon \in (0,1) : \forall x,y \in X, \rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \varepsilon\rho(x,y)$. Тогда существует единственная непожвижная точка x_0: $\varphi(x_0) = x_0$.

Доказательство 5.1

Докажем существование. Пусть $d = diam(X) = \sup\{\rho(x,y) | x,y \in X\}$, тогда $\forall x,y \in X, \rho(x,y) \leq$ $\leq d$. Имеем убывающую последовательность множеств $X \supset \varphi(x) \supset \varphi^2(x) \supset ... \supset \varphi^n(x) \supset ....$ Тогда $I = \cap_n \varphi^{n-1}(x) = X \cap \varphi(x) \cap \varphi^2(x) \cap ...$ есть подмножество X, причем $diam(I) = 0$, так как $diam(\varphi^n(x)) \leq \varepsilon^n d$. При этом $\forall x \in X$, последовательность $X, \varphi(x), \varphi^2(x), ...$ имеет предельную точку $x_0 \in X$. Тогда $x_0 \in I$, а это означает, что $I = \{x_0\}$. Тогда так как $\varphi(I) \subset I$, то $\varphi(x_0) \in I$, то есть $\varphi(x_0) = x_0$ (x_0 – неподвижная точка).
Докажем единственность. Допустим, что существует еще одна неподвижная точка x^*, тогда $x^* = \varphi(x^*)$, что означает $x^* \in X, \varphi(x), \varphi^2(x), ...$, то есть $x^* \in I = \{x_0\}$, следовательно, $x^* = x_0$. □

Теорема 5.2: Теорема Перрона-Фробениуса (для $A > 0$)

Пусть A – положительная квадратная матрица, тогда

- Существует действительное положительное собственное значение $\hat{\lambda}_A$. Причем $\hat{\lambda}_A$ является простым корнем характеристического многочлена A и для любого другого собственного значения λ матрицы A верно $\hat{\lambda}_A \geq |\lambda|$, т.е. $\hat{\lambda}_A = \rho(A)$ – спектральный радиус.
- Существует положительный собственный вектор $\hat{\boldsymbol{x}}_A > \mathbf{0}$ отвечающий собственному значению $\hat{\lambda}_A$, причем данный собственный вектор является единственным (с точностью до домножения на число).

Доказательство 5.2

Возьмем область $x_1 + ... + x_n = 1$ и пересечем ее с $\{x_1 \geq 0, ..., x_2 \geq 0\}$. Таким образом мы получим замкнутое и ограниченное множество X. Определим отображение $\varphi : X \to X$, где

$\varphi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}/|A\boldsymbol{x}|_1$ на X. Так как X является компактом, φ имеет максимум на X.
Заметим, что если $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ и $A > 0$, то $A\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$, так как $(A\boldsymbol{x})_i = A_i\boldsymbol{x} = \sum_j a_{ij}x_j > 0$. Следовательно, $\forall \boldsymbol{x} \in X, \varphi(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}/|A\boldsymbol{x}|_1 > 0$.
Так как X - это выпуклая оболочка вершин $Q_i = (0, ..., 1, ..., 0)$ с 1 на i-том месте, то φ тоже является выпуклой оболочкой вершин $\varphi(Q_i) > 0$ (φ есть аффинное отображение). Так как $\forall i, a_{ii} < 1$ (A5), то $\varphi(Q_i) < 1$, зачит $\varphi(X)$ полностью содержится в X.
При этом данное отображение является сжимающим, то есть $\exists \varepsilon \in (0,1) : \rho(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \leq \varepsilon\rho(x,y)$. Тогда по теореме о сжимающем отображении получаем, что существует единственная непожвижная точка x_0: $\varphi(x_0) = x_0$, то есть $A\boldsymbol{x_0}/|A\boldsymbol{x_0}|_1 = \boldsymbol{x_0}$. Следовательно, $A\boldsymbol{x_0} = \hat{\lambda}_A\boldsymbol{x_0}$, где $\hat{\lambda}_A = |A\boldsymbol{x_0}|_1 > 0$. Так как $\boldsymbol{x_0}$ является неотрицательным ненулевым вектором и $A > 0$, то $A\boldsymbol{x_0} > 0$. Следовательно, $A\boldsymbol{x_0} = \hat{\lambda}_A\boldsymbol{x_0} > 0$, то есть $\hat{\lambda}_A\boldsymbol{x_0} > 0$. Из $\hat{\lambda}_A > 0$ получаем $\boldsymbol{x_0} > 0$.
Докажем, что $\hat{\lambda}_A$ есть спекртральный радиус A. Пусть μ - собственное значение матрицы A, которому отвечает собственный вектор $\boldsymbol{y}$ с $||\boldsymbol{y}|| = 1$.

$$A\boldsymbol{y} = \mu\boldsymbol{y} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_i = \mu y_i \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}y_i| \geq |\mu y_i| \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|y_i| \geq |\mu| \cdot |y_i|$$

Обозначим как $|\boldsymbol{y}|$ вектор из модулей компонент вектора $\boldsymbol{y}$. Так как $|\boldsymbol{y}| \in X$, то мы получаем $\varphi(|\boldsymbol{y}|) \geq |\mu|$. Так как $\hat{\lambda}_A$ является максимумом φ на X, то $\hat{\lambda}_A \geq |\mu|$, поэтому $\hat{\lambda}_A$ есть спектральный радиус. $\square$

Теорема 5.3: Теорема Перрона-Фробениуса (для $A \geq 0$)

Пусть A – неотрицательная неразложимая матрица, тогда

- Существует действительное положительное собственное значение $\hat{\lambda}_A$. Причем $\hat{\lambda}_A$ является простым корнем характеристического многочлена A и для любого другого собственного значения λ матрицы A верно $\hat{\lambda}_A \geq |\lambda|$, т.е. $\hat{\lambda}_A = \rho(A)$ – спектральный радиус.
- Существует положительный собственный вектор $\hat{\boldsymbol{x}}_A > \boldsymbol{0}$ соответствующий собственному значению $\hat{\lambda}_A$. Данный собственный вектор является единственным с точностью до домножения на число. Другими словами, все собственные вектора, соответствующие собственному значению $\hat{\lambda}_A$, имеют вид $\hat{\boldsymbol{y}}_A = \mu\hat{\boldsymbol{x}}_A$, где $\mu \in \mathbb{R}$.

Теорема 5.4: Для $A \geq 0$

Пусть матрица A неотрицательная, тогда

1) У матрицы A есть действительное неотрицательное собственное значение $\hat{\lambda}_A$ такой, что для любого другого собственного значения λ матрицы A верно $\hat{\lambda}_A \geq |\lambda|$;
2) Существует неоприцательный собственный вектор $\hat{\boldsymbol{x}}_A$ соответствующий $\hat{\lambda}_A$;
3) Для заданного числа $\mu \in \mathbb{R}$ существует неотрицательная матрица $(\mu I - A)^{-1}$ тогда и только тогда, когда $\mu > \hat{\lambda}_A$.

Доказательство 5.3

Докажем (3). Так как $\mu > \hat{\lambda}_A$, то $\forall \boldsymbol{y}$, система $(\mu I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ имеет единственное решение $\boldsymbol{x} = (\mu I - A)^{-1}\boldsymbol{y}$. Докажем, что из $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ следует $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$.
Если в векторе $\boldsymbol{x}$ есть отрицательные компоненты, то система $(\mu I - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ может быть представлена в виде:

$$\begin{pmatrix} \mu I - A_1 & -A_{12} \\ -A_{21} & \mu I - A_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{y},$$

где $x_1 > 0, x_2 \geq 0, \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$. Поэтому $-(\mu I - A_1)x_1 - A_{12}x_2 \geq 0$, следовательно, $-(\mu I - A_1)x_1 \geq 0$, то есть $\mu x_1 \leq A_1 x_1$. Тогда получаем, что для максимального неотрицательного собственного числа подматрицы A_1 верно $\lambda_1 \leq \mu$, что противоречит $\hat{\lambda}_A \geq \lambda_1$ и $\mu > \hat{\lambda}_A$.
Пусть $(\mu I - A)^{-1} \geq 0$, $\boldsymbol{y} > \mathbf{0}$ и соответствующий $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$. Тогда из $\mu\boldsymbol{x} - A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ следует $A\boldsymbol{x} < \mu\boldsymbol{x}$. Так как $A\boldsymbol{x} = \hat{\lambda}_A\boldsymbol{x}$, то $\hat{\lambda}_A < \mu$. □

Теорема 5.5: Эквивалентные условия

Пусть A – неотрицательная матрица и $B = I - A$. Тогда следующие условия являются эквивалентными:

1) Матрица A является продуктивной, т.е. $\exists \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} : B\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$;
2) Матрица $B^{-1} = (I - A)^{-1}$ существует и является неотрицательной;
3) Выполняются условия Хокинса-Саймона;
4) Все собственные вектора λ матрицы A удовлетворяют неравенству $|\lambda| < 1$;
5) $\hat{\lambda}_A < 1$.

В этом случае собственный вектор Перрона-Фробениуса удовлетворяет $B\hat{\boldsymbol{x}}_A \geq \mathbf{0}$.

Доказательство 5.4

Эквивалентность первых трех пунктов была доказана ранее. Эквивалентность условий (2), (4) и (5) следует из предыдущей теоремы.
Докажем последнее утверждение теоремы. Оно следует из (4) и равенства $A\hat{\boldsymbol{x}}_A = \hat{\lambda}_A\hat{\boldsymbol{x}}_A$, так как

$$B\hat{\boldsymbol{x}}_A = (I - A)\hat{\boldsymbol{x}}_A = (\hat{\lambda}_A I - A)\hat{\boldsymbol{x}}_A + (1 - \hat{\lambda}_A)\hat{\boldsymbol{x}}_A = (1 - \hat{\lambda}_A)\hat{\boldsymbol{x}}_A \geq \mathbf{0}.$$

□

Теорема 5.6: Замечание

Пусть A – неотрицательная неразложимая матрица, тогда следующие условия эквивалентны:

1) $\forall \boldsymbol{d} \geq \mathbf{0} \wedge \boldsymbol{d} \neq \mathbf{0}$, система $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}$ имеет положительное решение $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$;
2) Матрица A продуктивная;
3) $\hat{\lambda}_A < 1$;
4) $(I - A)\hat{\boldsymbol{x}}_A > \mathbf{0}$.

6 Используемая литература

Aleskerov, F., Piontkovski, D., & Ersel, H. (2011). *Linear Algebra for Economists*. Dordrecht, Heidelberg: Springer.

Bapat, R.B., & Raghavan, T.E.S. (1997). *Nonnegative Matrices and Applications*. Cambridge University Press.

Debreu, G., & Herstein, I.N. (1953). Nonnegative square matrices. *Econometrica*, 21, 597–607.

Takayama A. (1985). *Mathematical Economics*, 2nd Edition. Cambridge University Press.