Петяева Елизавета, “О связи между мультивекторным дифференцированием и свертками в геометрических алгебрах”, 9 марта 2024.

1 Simplicial derivative. Part 1

Следующий семинар направлен на разбор статьи Лесенби, в которой автор выводит явный вид характеристического многочлена матриц $\in \mathrm{SU}(3)$ в геометрической алгебре $\mathcal{G}(I)$.

Характристический многочлен в $\mathcal{G}(I)$ представлен следующий образом:

$$C_f(\lambda) = \sum_{s=0}^{m} (-\lambda)^{m-s} \partial_(s) * f_(s) \tag{1}$$

Здесь $\partial_{(s)} * f_{(s)}$ - это симплексная производная (simplicial derivative) пока что непонятно зачем, а λ - корень характеристического уравнения.

p.s. Разницу между геометрической алгеброй и вещественной алгеброй Клиффорда мы проводим скорее формально из-за разницы некоторых обозначений в разных источниках.

1.1 Открытые вопросы

Утверждение 5

$$\partial_X = P(\partial_X) = \sum_J a^J a_J * \partial_X, \qquad P - \text{проекция на } \mathcal{G}(I) \tag{2}$$

1.2 Основные обозначения

Для начала напомню основные обозначения с которыми мы работаем.

Определение 1. Рассмотрим геометрическую алгебру $\mathcal{G}(I)$ (Cl_p над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, где $p = n \in N$). Будем называть ее элементы мультивекторами.

Определение 2. Мультивектор $A = \langle A\rangle_r$, где $r \geq 0$ называется однородным или r-вектором.

Определение 3.
Простой r-вектор A_r - это мультивектор, который можно выразить через произведение r антикоммутирующих векторов $a_1 a_2 \cdots a_r$, где $a_i a_j = -a_j a_i$.

Замечание 1. Все простые векторы являются однородными

Утверждение 1. Произвольный мультивектор может быть представлен в ввиде суммы r-векторов:

$$A = \langle A\rangle_0 + \langle A\rangle_1 + \langle A\rangle_2 + \ldots + \langle A\rangle_n = \sum_{r=1}^{n} \langle A\rangle_r. \tag{3}$$

В основном в $\mathcal{G}(I)$ мы работаем с 4 операциями умножения:
AB (геометрическим), $A \cdot B$ (внутренинм), $A \wedge B$ (внешним), A*B(скалярным).

Определение 4. Под внутренним произведением двух однородных мультивекторов будем подразумевать следующую операцию:

$$\begin{cases} \langle A\rangle_r \cdot \langle B\rangle_s := \langle \langle A\rangle_r \langle B\rangle_s \rangle_{|r-s|}, \text{если } r, s > 0, \\ \langle A\rangle_r \cdot \langle B\rangle_s := 0, \text{если } r \text{ или } s = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Для произвольных мультивекторов можем обобщить определение до:

$$A \cdot B \equiv \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \langle A\rangle_r \cdot \langle B\rangle_s, \qquad A = \sum_{r=1}^{n} \langle A\rangle_r, \quad B = \sum_{s=1}^{n} \langle B\rangle_s. \tag{5}$$

Пример 1.
Пусть

$$A = e_1 e_2 + e_3 e_4 e_5, \qquad B = e_3 + e_6 e_7.$$

Тогда

$A \cdot B = (e_1 e_2 + e_3 e_4 e_5) \cdot (e_3 + e_6 e_7) = (e_1 e_2 \cdot e_3) + (e_3 e_4 e_5 \cdot e_3) + (e_1 e_2 \cdot e_6 e_7) + (e_3 e_4 e_5 \cdot e_6 e_7) =$

$\langle e_1e_2e_3\rangle_{2-1} + \langle e_3e_4e_5e_3\rangle_{3-1} + \langle e_1e_2e_6e_7\rangle_{2-2} + \langle e_3e_4e_5e_6e_7\rangle_{3-2} = 0 + e_4e_5 + 0 + 0 = e_4e_5.$

Определение 5. Под внешним произведением двух однородных мультивекторов будем подразумевать следующую операцию:

$$\langle A\rangle_r \wedge \langle B\rangle_s := \langle\langle A\rangle_r \langle B\rangle_s\rangle_{r+s}. \tag{6}$$

Для произвольных векторов можем обобщить определение до:

$$A \wedge B := \sum_r \sum_s \langle A\rangle_r \wedge \langle B\rangle_s \qquad A = \sum_{r=1}^{n} \langle A\rangle_r, \quad B = \sum_{s=1}^{n} \langle B\rangle_s. \tag{7}$$

Пример 2.
Пусть

$$A = e_1e_2 + e_3e_4e_5, \qquad B = e_3 + e_6e_7.$$

Тогда

$A \wedge B = (e_1e_2 + e_3e_4e_5) \wedge (e_3 + e_6e_7) = (e_1e_2 \wedge e_3) + (e_3e_4e_5 \wedge e_3) + (e_1e_2 \wedge e_6e_7) + (e_3e_4e_5 \wedge e_6e_7) = \langle e_1e_2e_3\rangle_{2+1} + \langle e_3e_4e_5e_3\rangle_{3+1} + \langle e_1e_2e_6e_7\rangle_{2+2} + \langle e_3e_4e_5e_6e_7\rangle_{3+2} = e_1e_2e_3 + 0 + e_1e_2e_6e_7 + e_3e_4e_5e_6e_7 = e_1e_2e_3 + e_1e_2e_6e_7 + e_3e_4e_5e_6e_7.$

Определение 6. Скалярным произведением будем называть операцию взятия скаляра от геометрического произведения:

$$A * B := \langle AB\rangle. \tag{8}$$

Определение 7. Введем операцию реверса $A \to A^{\sim}$:

$$A^{\sim} = (\sum_r \langle A\rangle_r)^{\sim} = \sum_r (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}} \langle A\rangle_r. \tag{9}$$

Со следующими свойствами:

$$\widetilde{(AB)} = \widetilde{B}\widetilde{A}, \tag{10}$$
$$\widetilde{(A+B)} = \widetilde{A} + \widetilde{B}, \tag{11}$$
$$\langle\widetilde{A}\rangle = \langle A\rangle, \tag{12}$$
$$\widetilde{a} = a, \text{где a} = \langle a\rangle_1, \tag{13}$$
$$(\widetilde{a_1 a_2 \cdots a_r}) = a_r \cdots a_2 a_1, \tag{14}$$
$$\langle\widetilde{A}\rangle_r = \widetilde{\langle A\rangle_r} = (-1)^{r(r-1)/2}\langle A\rangle_r. \tag{15}$$

Утверждение 2. Из свойств 10 и 15:

$$\langle AB\rangle_r = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}\langle\widetilde{B}\widetilde{A}\rangle_r. \tag{16}$$

Доказательство $\langle AB\rangle_r = \widetilde{\langle\widetilde{B}\widetilde{A}\rangle_r} = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}\langle\widetilde{B}\widetilde{A}\rangle_r$

Утверждение 3. Из утверждения 2 и свойства 15 можно заметить, что для однородных векторов сохраняется следующие свойство:

$$\langle A\rangle_r \cdot \langle B\rangle_s = (-1)^{r(s-1)}\langle B\rangle_s \cdot \langle A\rangle_r, r \leqslant s. \tag{17}$$

Доказательство

$$\langle A\rangle_r \cdot \langle B\rangle_s = \langle\langle A\rangle_r \langle B\rangle_s\rangle_{(s-r)} = (-1)^{\frac{(s-r)((s-r)-1)}{2}}\langle\langle\widetilde{B}\rangle_s\langle\widetilde{A}\rangle_r\rangle_{s-r} \tag{18}$$
$$= (-1)^{\frac{(s-r)((s-r)-1)}{2}}\langle(-1)^{s(s-1)/2}\langle B\rangle_s(-1)^{r(r-1)/2}\langle A\rangle_r\rangle_{s-r} = \tag{19}$$
$$= (-1)^{\frac{(s-r)((s-r)-1)+s(s-1)+r(r-1)}{2}}(\langle B\rangle_s \cdot \langle A\rangle_r). \tag{20}$$

Правую часть мы получили, осталось получить нужный знак. Рассмотрим степень -1.

$\frac{(s-r)((s-r)-1)+s(s-1)+r(r-1)}{2} = \frac{s^2-2sr+r^2-s+r+s^2-s+r^2-r}{2} = \frac{2s^2-2sr+2r^2-2s}{2}$
$= s^2-sr+r^2-s = r(r-s)+s(s-1) = r((r-1)-(s-1))+s(s-1) = r(r-1)-r(s-1)+s(s-1)$

Поскольку $r(r-1)$ и $s(s-1)$ не влияют на четность итога, можем оставить только $r(s-1)$.

Утверждение 4. В более общем виде взаимосвязь между 4-мя видами произведений можно показать следуюшим образом:

$$\overset{k}{A}\overset{l}{B} = \underbrace{\langle AB\rangle_{|k-l|}}_{A\cdot B} + \langle AB\rangle_{|k-l|+2} + \ldots + \underbrace{\langle AB\rangle_{k+l}}_{A\wedge B} \tag{21}$$

Отдельно рассматривается случай $|k-l| = 0$, который обозначает скалярное произведение $\underbrace{\langle AB\rangle_{|k-l|}}_{A*B}$.

Замечание 2. ***О последовательности операций*** Всегда помним, что $A * BC = (A * B)C \neq A * (BC)$

Определение 8. n-вектор $e_1 \ldots e_n$ в $\mathcal{G}(I)$ будем называть псевдоскаляром и обозначать I_n или I.

Определение 9. Множество векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ мы называем линейно независимым, если ни один из них мы не можем представить в виде линейной комбинации других.

Замечание 3. В терминах $\mathcal{G}(I)$ линейно независимые векторы мы можем определить через внешнее произведение. Множество векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ мы называем линейно независимым, если :

$$A = a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n \neq 0 \tag{22}$$

Замечание 4. Соответственно, если векторы линейно зависимые, то:

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n = 0 \tag{23}$$

Определение 10. Множество векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в $\mathcal{G}(I), I = a_1 \wedge a_2 \ldots \wedge a_n$ мы называем фреймом если и только если $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n \neq 0$ (лнз).

Определение 11. Для произвольного фрейма $\{a_k\}$ существует взаимный фрейм $\{a^k\}$, определенный как:

$$a^i \cdot a_j = \delta^i_j. \tag{24}$$

Говорят, что фреймы дуальны к взаимным фреймам и наборот.

Определение 12. Базисом геометрической алгебры $\mathcal{G}(I)$, где $I = a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$ будем называть все множество возможных внешних перемножений элементов фрейма. Будем обозначать базис как $\{a_J\}$

$$a_0, a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_1} \wedge a_{j_2}, \ldots, a_{j_1} \wedge a_{j_2} \wedge \ldots \wedge a_{j_n}, \qquad j_1 < j_2 < \ldots \tag{25}$$

Аналогично, взаимным базисом будем называть все множество возможных внешних перемножений элементов взаимного фрейма. Будем обозначать взаимный базис как $\{a^J\}$

$$a^0, a^{j_1}, a^{j_2} \wedge a^{j_1}, \ldots, a^{j_n} \wedge a^{j_{n-1}} \wedge \ldots \wedge a^{j_1}, \qquad j_1 < j_2 < \ldots \tag{26}$$

Определение 13. ***A-производная (или дифференциал)*** Пусть мультивекторная функция $F = F(X)$ определена на геометрической алгебре $\mathcal{G}(I)$, тогда A-производная определена как

$$A * \partial_X F(X) \equiv \lim_{\tau \to 0} \frac{F(X + \tau P(A)) - F(X)}{\tau}, \tag{27}$$

где

$$F : \mathcal{G}(I) \to \mathcal{G}(I), \quad I = \langle I \rangle_n, \tag{28}$$

$$P(A) = (A \cdot I) \cdot \widetilde{I} \iff A \in \mathcal{G}(I) \tag{29}$$

Замечание 5. Стоит заметить, что результатом дифференцирования будет не скаляр (как можно изначально предположить из использования скалярного произведения), а мультивектор. Самый простой пример:

$$A * \partial_X X = \lim_{\tau \to 0} \frac{X + \tau P(A) - X}{\tau} = P(A) \tag{30}$$

Утверждение 5. Проекция любого мультивектора B в $\mathcal{G}(I)$ может быть представлена в виде

$$B = P(B) = \sum_J a_J a^J * B = \sum_J a^J a_J * B \tag{31}$$

Доказательство

$$B = \sum_J b_J a_J = \sum_J b^J a^J \tag{32}$$

$$\sum_J a_J a^J * B = \sum_J a_J a^J * (\sum_K b_K a_K) = \sum_J a_J (\underbrace{\langle a^J (\sum_K b_K a_K)\rangle}_{\text{выживает только } K=J} = \tag{33}$$

$$= \sum_J a_J b_J \underbrace{\langle a^J a_J \rangle}_{=1} = \sum_J b_J a_J = B \tag{34}$$

Аналогично для $\sum_J a^J a_J * B$, здесь B раскрываем через $\sum_J b^J a^J$

Утверждение 6. Дифференциальный оператор ∂_X обладает алгебраическими свойствами мультивектора:

$$\partial_X = P(\partial_X) = \sum_J a^J a_J * \partial_X, \qquad P - \text{проекция на } \mathcal{G}(I) \tag{35}$$

Замечание 6. Как можно об этом думать

На предыдущем семинаре мы проводили анологию с градиентом:

$$\nabla f = \sum_i \frac{df}{dx_i} dx_i \tag{36}$$

Можно представить также и мультивекторный дифференциал, если опустить предположение о бескоординатном подходе, на который делает акцент Хестенес.

$$\partial_X = \nabla = \sum_J a_J \frac{\partial}{\partial \langle X \rangle_J} \tag{37}$$

$$A * \partial_X F(X) = A * \nabla F(X) = \sum_J A * a_J \frac{\partial}{\partial \langle X \rangle_J} \langle F(X) \rangle_J \tag{38}$$

Повторим тот же пример:

$$A * \partial_X X = A * \nabla X = \sum_J A * a_J \frac{\partial}{\partial \langle X \rangle_J} \langle X \rangle_J = \sum_J \underbrace{A_J * a_J}_{\text{по св-ву } *} \frac{\partial}{\partial \langle X \rangle_J} \langle X \rangle_J = \tag{39}$$

$$= \sum_J \lim_{\tau \to 0} \frac{\langle X \rangle_J + \tau P(\langle A \rangle_J) - \langle X \rangle_J}{\tau} = \sum_J P(\langle A \rangle_J) = P(A) \tag{40}$$

В общем виде это будет выглядеть следующим образом:

$$\partial_X X = \nabla X = \sum_J a_J \frac{\partial}{\partial \langle X \rangle_J} \langle X \rangle_J \tag{41}$$

Грубо говоря, мы рассматриваем ∂_X как "полный"мультивектор, от которого берем проекцию либо на весь базис алгебры $\sum_J a^J a_J * \partial_X$, либо на произвольный мультивектор $A * \partial_X F(X)$. Таким образом дифференциал в $\mathcal{G}(I)$ всегда легче воспринимать в контексте проекции на определенное пространство.

Замечание 7.

$$\partial F \equiv \partial_X F(X) = \partial_A A * \partial_X F = \partial_A \underline{F}(X, A) = \partial_A F_A(X) \equiv \underline{\partial F} \tag{42}$$

Утверждение 7.

$$A * \partial \langle F \rangle_r = \langle A * \partial F \rangle_r \tag{43}$$

Доказательство

$$A * \partial \langle F \rangle_r = \lim_{\tau \to 0} \frac{\langle F(X + \tau P(A)) \rangle_r - \langle F(X) \rangle_r}{\tau} =$$

$$= \langle \lim_{\tau \to 0} \frac{F(X + \tau P(A)) - F(X)}{\tau} \rangle_r = \langle A * \partial F \rangle_r \tag{44}$$

Утверждение 8. Правило произведения для двух функций F, G в $\mathcal{G}(I)$

$$A * \partial_X(FG) = (A * \partial_X F)G + F(A * \partial_X G) \tag{45}$$

Доказательство

$$\begin{aligned}
&A * \partial_X(FG) = \lim_{\tau\to 0} \frac{F(X+\tau P(A))G(X+\tau P(A)) - F(X)G(X)}{\tau} = \\
&= \lim_{\tau\to 0} \frac{F(X+\tau P(A))G(X+\tau P(A)) - F(X)G(X+\tau P(A))}{\tau} + \\
&\frac{+F(X)G(X+\tau P(A)) - F(X)G(X)}{\tau} = \\
&= \lim_{\tau\to 0}\{\frac{(F(X+\tau P(A) - F(X))G(X+\tau P(A)) + F(X)(G(X+\tau P(A)) - G(X))}{\tau}\} = \\
&= (A * \partial_X F)\lim_{\tau\to 0} G(X+\tau P(A)) + F(A * \partial_X G) = (A * \partial_X F)G + F(A * \partial_X G)
\end{aligned} \tag{46}$$

Утверждение 9.

$$A * \partial_X B = \lim_{\tau\to 0} \frac{B - B}{\tau} = 0 \tag{47}$$

Утверждение 10.

$$A * \partial_X X = P(A) \tag{48}$$

Доказательство

$$A * \partial_X X = \lim_{\tau} \frac{X + \tau P(A) - X}{\tau} = P(A) \tag{49}$$

Утверждение 11.

$$A * \partial_X(X * B) = P(A) * B \tag{50}$$

Доказательство

$$\begin{aligned} & A * \partial_X (X * B) = A * \partial_X \langle XB \rangle_0 = \langle A * \partial_X XB \rangle_0 = \langle (A * \partial_X X)B + XA * \partial_X B \rangle_0 = \\ & = \langle (P(A)B + 0) \rangle_0 = P(A) * B \end{aligned} \tag{51}$$

Утверждение 12.

$$\partial_X = \partial_A A * \partial_X \tag{52}$$

Доказательство

$$\partial_A A * \partial_X = \sum_J a^J a_J * \partial_A A * \partial_X = \sum_j a^J P(a_J) * \partial_X = \sum_J a^J a_J * \partial_X = \partial_X \tag{53}$$

Определение 14. Теперь, проще воспринимать следующее. Пусть:

- $X = F(X), F(X)$ - тождественная функция, определенная на линейном подпространстве $\mathcal{G}$ размерности d.
- $\not{A} \equiv P_{subspace}(A)$ - проекция на заданное линейное подпространтсво размерности d.
- Случаи с $X = 0$ не рассматриваются.

Тогда:

$$A * \partial_X X = \not{A} \tag{54}$$

Доказательство
Мы знаем, что для $F(X) = X$:

$$A * \partial_X X = lim_{\tau \to 0} \frac{X + \tau P(A) - X}{\tau} = P(A) = \not{A} \tag{55}$$

Это может быть не совсем очевидный из последовательности операций комментарий, состоящий в том, что если функция "бьет"в какое-то подпростронство, то и проекция самого мультивектора A, как результат, тоже будет в нем.

Определение 15. Можем представить дифференциал в следующих видах:

$$\partial_X = \textstyle\sum_{r=0}^{n} \partial_{\langle X\rangle_r} = \sum_{r=0}^{n} \langle\partial\rangle_r, \text{ где} \tag{56}$$

$$\partial_{\langle X\rangle_r} = \langle\partial_X\rangle_r = \langle \textstyle\sum_J a^J a_J * \partial_X\rangle_r = \langle\sum_J a^J \langle a_J \partial_X\rangle_0\rangle_r = \tag{57}$$

$$[\text{справа скаляр - пробрасываем проекцию в левую часть}] = \tag{58}$$

$$\textstyle\sum_J \langle a^J\rangle_r \langle a_J \partial_X\rangle_0 = \tag{59}$$

$$[\text{ничего не поменяется, если поставим проекцию}] = \tag{60}$$

$$\textstyle\sum_J \langle a^J\rangle_r \langle\langle a_J\rangle_r \partial_X\rangle_0 = \sum_J \langle a^J\rangle_r \langle a_J\rangle_r * \partial_X \tag{61}$$

$$A * \partial_X = \sum_{r=0}^{n} \langle A\rangle_r * \partial_X = \sum_{r=0}^{n} A * \langle\partial_X\rangle_r = \sum_{r=0}^{n} \langle A\rangle_r * \langle\partial_X\rangle_r = \sum_{r=0}^{n} \langle A\rangle_r * \langle\partial\rangle_r \tag{62}$$

Утверждение 13. Для $X = \sum_{r=0}^{n} \langle X\rangle_r$, определенном на всей $\mathcal{G}(I)$

$$A * \langle\partial\rangle_r X = \langle\dot\partial\rangle_r \dot X * A = P(\langle A\rangle_r) \tag{63}$$

Доказательство

$$A * \langle\partial\rangle_r X = \langle A\rangle_r * \partial_X X = P(\langle A\rangle_r) \tag{64}$$

$$\dot{\partial_X} \dot X * \langle A\rangle_r = \sum_J \langle a^J\rangle_r \underbrace{\langle a_J\rangle_r * \dot{\partial_X} \dot X} * A = \sum_J \langle a^J\rangle_r P(\langle a_J\rangle_r) * A = \tag{65}$$

$$= \sum_J \langle a^J\rangle_r \langle a_J\rangle_r * A = P(\langle A\rangle_r)\square$$

Определение 16. ***Запись дифференциала через биноминальный коэффициент***

Для $A = P(A)$, $K = \frac{1}{2}(r + s - |r - s|)$ и $\binom{i}{j} = 0$, если $j > i$, то:

$$\langle\partial\rangle_s \langle X \langle A\rangle_r\rangle_m = \binom{r}{k}\binom{n-r}{s-k} \delta^m_{r+s-2k} \langle A\rangle_r \tag{66}$$

Для начала рассмотрим дифференцирование просто r-вектора $A_r = \vec{a}_1 \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_r$ и $\mathcal{G}(I)$, включающую в себя $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r$ и докажем следующее равенство:

$$\langle\partial\rangle_s\langle XA_r\rangle_m = \langle\partial\rangle_s\langle\langle X\rangle_s A_r\rangle_m \tag{67}$$

Доказательство

Левая часть:

$\langle\partial\rangle_s\langle XA_r\rangle_m = 15,7 = \sum_J \langle a^J\rangle_s\langle\langle a_J\rangle_s * \langle\partial\rangle_s XA_r\rangle_m = 13 = \sum_J \langle a^J\rangle_s\langle\langle a_J\rangle_s A_r\rangle_m$

Правая часть:

$$\langle\partial\rangle_s\langle\langle X\rangle_s A_r\rangle_m = 15 = \sum_J \langle a^J\rangle_s\langle\langle a_J\rangle_s * \langle\partial\rangle_s\langle X\rangle_s A_r\rangle_m = 13,7 = \tag{68}$$

$$= \sum_J \langle a^J\rangle_s\langle \underbrace{\langle\langle a_J\rangle_s * \langle\partial\rangle_s X\rangle_s}_{=\langle P(\langle a_J\rangle_s)\rangle_s = P(\langle a_J\rangle_s) = \langle a_J\rangle_s} A_r\rangle_m = \sum_J \langle a^J\rangle_s\langle\langle a_J\rangle_s * \langle\partial\rangle_s XA_r\rangle_m = \langle\partial\rangle_s\langle XA_r\rangle_m \square$$

Небольшой комментарий по переходу в правой части:
Так, во втором равенстве по 13 заметим, что (комментарий Хитзера, мне не оч нравится):

$$\langle a_J\rangle_s * \langle\partial\rangle_s X = \langle\dot{\partial}\rangle_s \dot{X} * \langle a_J\rangle_s = \langle\dot{\partial}\rangle_s\langle\dot{X}\rangle_s * \langle a_J\rangle_s = \langle a_J\rangle_s * \langle\partial\rangle_s\langle X\rangle_s \tag{69}$$

Запишем теперь $\langle a^J\rangle_s, \langle a_J\rangle_s, A_r$ из 67 в явном виде:

$$\begin{aligned}\langle\partial\rangle_s\langle XA_r\rangle_m = \langle\partial\rangle_s\langle\langle X\rangle_s A_r\rangle_m = \sum_J \langle a^J\rangle_s\langle\langle a_J\rangle_s A_r\rangle_m = \\ = \sum_{j_1<j_2<\ldots<j_s} \vec{a}^{j_s}\ldots\vec{a}^{j_1}\langle \underbrace{\underbrace{\vec{a}_{j_1}\ldots\vec{a}_{j_s}}_{\text{s векторов}} \underbrace{\vec{a}_1\ldots\vec{a}_r}_{\text{r векторов}}}_{r+s \text{ векторов}}\rangle_m\end{aligned} \tag{70}$$

Все a_{j_i} взяты из ортонормированного базиса $\mathcal{G}(I)$, где $i < n$. Выбирая m векторов ($m = r+s-2k$) из умножения $r+s$ векторов означает, что векторы размера $s = \vec{a}_{j_1}\ldots\vec{a}_{j_s}$ и $r = \vec{a}_1\ldots\vec{a}_r$ мы достаем из одного базиса $\mathcal{G}(I)$ и при их умножении k векторов схлопываются. Если же это не так, то проекция $\langle\rangle_m = 0$. Для всех перемножений, удовлетворяющих проекции ($\langle\ldots\rangle_m != 0$) можно выбросить это условие. В таком случае, рассматривая все возможные перемножения r, s можно записать результат в более общем виде. Сколько возможных перемножений возможно в $\sum_{j_1<\ldots<j_s}$? Существует $\binom{r}{k}$ различных вариантов выбора k из r векторов. Далее мы можем свободно выбрать $s-k$ векторов из $n-r$ (потому что в s векторах точно должны быть k векторов, пересекающихся с r). Таким

образом, получаем $\binom{n-r}{s-k}$.

$$\sum_{j_1<j_2<\ldots<j_s} \vec{a}^{j_s}\ldots\vec{a}^{j_1}\langle\underbrace{\underbrace{\vec{a}_{j_1}\ldots\vec{a}_{j_s}}_{\text{s векторов}}\underbrace{\vec{a}_1\ldots\vec{a}_r}_{\text{r векторов}}}_{r+s\text{ векторов}}\rangle_m = \binom{r}{k}\binom{n-r}{s-k}\delta^m_{r+s-2k}A_r \tag{71}$$

Результат также распространяется на $\langle A\rangle_r$ по линейности.

Утверждение 14. Для $A = P(A), K = \frac{1}{2}(r+s-|r-s|)$ и $\binom{i}{j} = 0$ если $j > i$

$$\langle\partial\rangle_s\langle A\rangle_r\langle X\rangle_s = \sum_J \langle a^J\rangle\langle A\rangle_r\langle a_J\rangle_s = \Gamma^r_s\langle A\rangle_r, \qquad \Gamma^r_s = \sum_k^K(-1)^{rs-k}\binom{r}{k}\binom{n-r}{s-k} \tag{72}$$

Доказательство

В одном из предыдущих семинаров мы рассматривали следующее свойство: $\langle AB\rangle_r = (-1)^{\frac{r(r-1)}{2}}\langle\widetilde{B}\widetilde{A}\rangle_r$

$$\langle\langle A\rangle_r\langle X\rangle_s\rangle_m = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}\langle\widetilde{\langle X\rangle_s}\widetilde{\langle A\rangle_r}\rangle_m = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}+\frac{r(r-1)}{2}+\frac{s(s-1)}{2}}\langle\langle X\rangle_s\langle A\rangle_r\rangle_m \tag{73}$$

$$\begin{aligned}\langle A\rangle_r\langle X\rangle_s &= \sum_k^K\langle\langle A\rangle_r\langle X\rangle_s\rangle_{|r-s|+2k} = \sum_k^K\langle\langle A\rangle_r\langle X\rangle_s\rangle_{r+s-2k} = \\ &= \sum_k^K(-1)^{(r+s-2k)(\frac{r+s-2k-1}{2})+\frac{r(r-1)}{2}+\frac{s(s-1)}{2}}\langle\langle X\rangle_s\langle A\rangle_r\rangle_{r+s-2k}\end{aligned} \tag{74}$$

Можем уменьшить степень у (-1), поскольку знак не меняется при $|r-s| = |r-s|+2 = \ldots = |r-s|+2K = |r-s|+(r+s)-|r-s| = r+s$

Также: $r+s = r+s-2 = \ldots = r+s-2K = r+s-(r+s)+|r-s| = |r-s|$

$$\begin{aligned}&(r+s-2k)(\frac{r+s-2k-1}{2})+\frac{r(r-1)}{2}+\frac{s(s-1)}{2} = \\ &= \frac{1}{2}(2rs-4ks-4kr+4k^2+2k-\underbrace{r+r^2}_{r(r-1)}-\underbrace{s+s^2}_{s(s-1)}) = (rs-\underbrace{2ks}_{\text{чет}}-\underbrace{2kr}_{\text{чет}}+\underbrace{2k^2}_{\text{чет}}+k) = rs+k\end{aligned} \tag{75}$$

С точки зрения знака без разницы $rs+k$ или $rs-k$. Таким образом:

$$\langle\partial\rangle_s\langle A\rangle_r\langle X\rangle_s = \sum_k^K (-1)^{(rs-k)}\langle\partial\rangle_s\langle\langle X\rangle_s\langle A\rangle_r\rangle_{r+s-2k} = \sum_k^K \underbrace{(-1)^{rs-k}\binom{r}{k}\binom{n-r}{s-k}}_{=\Gamma_s^r}\langle A\rangle_r \quad (76)$$

Также покажем перестановку:

$$\langle\partial\rangle_s\langle A\rangle_r\langle X\rangle_s = 15 = \sum_J \langle a^J\rangle_s \underbrace{\langle a_J\rangle_s * \langle\partial\rangle_s}_{\text{скаляр}}\langle A\rangle_s\langle X\rangle_s = \sum_J \langle a^J\rangle_s\langle A\rangle_s(\underbrace{\langle a_J\rangle_s * \langle\partial\rangle_s}_{\text{скаляр}}\langle X\rangle_s) =$$
$$= \sum_J \langle a^J\rangle_s\langle A\rangle_s(P(\langle a_J\rangle_s) = \sum_J \langle a^J\rangle_s\langle A\rangle_s\langle a_J\rangle_s \quad (77)$$

Утверждение 15. Для $K = \frac{1}{2}(r+s-|r-s|)$

$$\langle\partial\rangle_s AX = \partial A\langle X\rangle_s = \sum_{r=0}^n \Gamma_s^r\langle A\rangle_r, \qquad \Gamma_s^r = \sum_k^K(-1)^{rs-k}\binom{r}{k}\binom{n-r}{s-k} \quad (78)$$

Доказательство

Чтобы привести этот случай к 14 необходимо показать, что $\langle\partial\rangle_s\langle A\rangle_r X = \langle\partial\rangle_s\langle A\rangle_r\langle X\rangle_s = \partial_X\langle A\rangle_r\langle X\rangle_s$

$$\langle\partial\rangle_s\langle A\rangle_r X = \sum_J \langle a^J\rangle_s \underbrace{\langle a_J\rangle_s * \langle\partial\rangle_s}_{\text{скаляр}}\langle A\rangle_s X = \sum_J \langle a^J\rangle_s\langle A\rangle_s(\underbrace{\langle a_J\rangle_s * \langle\partial\rangle_s X}) =$$
$$= \sum_J \langle a^J\rangle_s\langle A\rangle_s\langle a_J\rangle_s = \langle\partial\rangle_s\langle A\rangle_r\langle X\rangle_s \quad (78)$$

$$\partial_X\langle A\rangle_r\langle X\rangle_s = 15 = \sum_{t=0}^n\sum_J\langle a^J\rangle_t \underbrace{\langle a_J\rangle_t * \langle\partial\rangle_t}_{\text{скаляр}}\langle A\rangle_r\langle X\rangle_s = \sum_{t=0}^n\sum_J\langle a^J\rangle_t\langle A\rangle_r \underbrace{\langle a_J\rangle_t * \langle\partial\rangle_t\langle X\rangle_s} =$$
$$= \sum_{t=0}^n\sum_J\langle a^J\rangle_t\langle A\rangle_r\langle\langle a_J\rangle_t * \langle\partial\rangle_t X\rangle_s = \sum_{t=0}^n\sum_J\langle a^J\rangle_t\langle A\rangle_r \underbrace{\langle\langle a_J\rangle_t\rangle_s}_{\text{берем } s=t} = \sum_J\langle a^J\rangle_s\langle A\rangle_r\langle a_J\rangle_s$$
$$= \langle\partial\rangle_s\langle A\rangle_r\langle X\rangle_s \quad (77)$$

$$\langle\partial\rangle_s AX = \partial A\langle X\rangle_s = \langle\partial\rangle_s(\sum_{r=0}^{n}\langle A\rangle_r)X = 15 = \sum_{r=0}^{n}\underbrace{\langle\partial\rangle_s\langle A\rangle_r\langle X\rangle_s}_{\Gamma_s^r\langle A\rangle_r} \tag{78}$$

Теорема 1. *Соответствие сверток в АК с частным случаем дифференцирования Рассмотрим Алгебру Клиффорда $Cl_{p,q}, p = n, q = 0$ с ортонормированными генераторами $e^{u_1\ldots u_k}, u = 1,\ldots,n$. Произвольный элемент будем обозначать в ней A. Таким образом, для $Cl^{p,q}$ можем провести соответствие со свертками* **[1]** *через операцию диффенцирования. Для $s \le r, K = \frac{1}{2}(r+s-|r-s|)$*

$$\begin{aligned}\langle\partial\rangle_s AX &= \sum_{r=0}^{n}\sum_{J}\langle a^J\rangle_s\langle A\rangle_r\langle a_J\rangle_s = \sum_{r=0}^{n}\sum_{k}^{K}(-1)^{rs-k}\binom{r}{k}\binom{n-r}{s-k}\langle A\rangle_r = \\ &= \sum_{U\in I_s} e_U A e^U = \sum_{r=0}^{n}(-1)^{rs}(\sum_{k=0}^{s}(-1)^k\binom{r}{k}\binom{n-r}{s-k}\pi_r(A))\end{aligned} \tag{78}$$

Доказательство
Доказательство следует из 14, 15 и определения сверток в **[1]**.

Определение 17. *Дифференцированием по кватернионному типу будем называть следующую сумму проекций дифференциала:*

$$\langle\partial\rangle_{\overline{k}} = \sum_i \langle\partial\rangle_{4i+k}, \qquad k = 0,1,2,3 \tag{79}$$

Теорема 2. *Сумма по Кватернионным типам через дифференцирование Для Алгебры Клиффорда $Cl^{p,q}, p = n, q = 0$ можем записать свертки кватернионных типов с помощью дифференциала. При $I_{\overline{k}} = \{A \in I, |A| = k \ mod\, 4, k = 0,1,2,3\}$,*

$\langle\partial\rangle_{\overline{k}}AX = \sum_i \langle\partial\rangle_{4i+k}AX, k = 0,1,2,3$

$$\langle\partial\rangle_{\overline{0}}AX = \sum_{s\in I_{\overline{0}}}\sum_J \langle a^J\rangle_s A\langle a_J\rangle_s = \sum_{k=0}^{3} 2^{\frac{n-2}{2}}\cos(\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi n}{4})\langle A\rangle_{\overline{k}} + \\ +2^{n-2}(\langle A\rangle + \langle A\rangle_n) \tag{79}$$

$$\langle\partial\rangle_{\overline{1}}AX = \sum_{s\in I_{\overline{1}}}\sum_J \langle a^J\rangle_s A\langle a_J\rangle_s = \sum_{k=0}^{3} (-1)^{k+1}2^{\frac{n-2}{2}}\sin(\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi n}{4})\langle A\rangle_{\overline{k}} + \\ +2^{n-2}(\langle A\rangle + (-1)^{n+1}\langle A\rangle_n) \tag{79}$$

$$\langle\partial\rangle_{\overline{2}}AX = \sum_{s\in I_{\overline{2}}}\sum_J \langle a^J\rangle_s A\langle a_J\rangle_s = \sum_{k=0}^{3} -2^{\frac{n-2}{2}}\cos(\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi n}{4})\langle A\rangle_{\overline{k}} + \\ +2^{n-2}(\langle A\rangle + \langle A\rangle_n) \tag{79}$$

$$\langle\partial\rangle_{\overline{3}}AX = \sum_{s\in I_{\overline{3}}}\sum_J \langle a^J\rangle_s A\langle a_J\rangle_s = \sum_{k=0}^{3} (-1)^{k}2^{\frac{n-2}{2}}\sin(\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi n}{4})\langle A\rangle_{\overline{k}} + \\ +2^{n-2}(\langle A\rangle + (-1)^{n+1}\langle A\rangle_n) \tag{79}$$

Доказательство

Доказательство следует из 2 и **[1]**. *Общий пример доказательства для* $\langle\partial\rangle_{\overline{0}}AX$*:*

$$[1] \qquad 2^n = (1+1)^n = \sum_k \binom{n}{k} = \underbrace{\sum_k \binom{n}{4k}}_{a1} + \underbrace{\sum_k \binom{n}{4k+1}}_{a2} + \underbrace{\sum_k \binom{n}{4k+2}}_{a3} + \underbrace{\sum_k \binom{n}{4k+3}}_{a4}$$

$$[2] \qquad 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{\pi n}{4} + i\sin\frac{\pi n}{4}) = (1+i)^n = \sum_k \binom{n}{k} i^k = a_1 + ia_2 - a_3 - ia_4$$

$$[3] \qquad 0 = (1-1)^n = \sum_k \binom{n}{k}(-1)^k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4$$

$$[4] \qquad 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{\pi n}{4} - i\sin\frac{\pi n}{4}) = (1-i)^n = \sum_k \binom{n}{k}(-i)^k = a_1 - ia_2 - a_3 + ia_4$$

Раскроем a_1*:*

$$[1]+[3] = 2(a_1+a_3) = 2^n$$
$$[2]+[4] = 2(a_1-a_3) = 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{\pi n}{4} + i\sin\frac{\pi n}{4}) + 2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{\pi n}{4} - i\sin\frac{\pi n}{4}) = 2^{\frac{n}{2}+1}\cos\frac{\pi n}{4}$$
$$\Rightarrow a_1 = \sum_k \binom{n}{4k} = 2^{n-2} + 2^{\frac{n}{2}-1}\cos\frac{\pi n}{4}$$

Далее заметим, что:

$$
\begin{aligned}
&\langle\partial\rangle_{\overline{0}}\langle A\rangle_r X = \langle\partial\rangle_0\langle A\rangle_r X + \langle\partial\rangle_4\langle A\rangle_r X + \langle\partial\rangle_8\langle A\rangle_r X + \ldots \\
&\langle\partial\rangle_{\overline{0}}\langle A\rangle_r X = \sum_k^K (-1)^{r0-k}\binom{r}{k}\binom{n-r}{0-k}\langle A\rangle_r + \sum_k^K (-1)^{r4-k}\binom{r}{k}\binom{n-r}{4-k}\langle A\rangle_r + \\
&+\sum_k^K (-1)^{r8-k}\binom{r}{k}\binom{n-r}{8-k}\langle A\rangle_r + \ldots = \sum_k^K (-1)^{k}\binom{r}{k}\binom{n-r}{0-k}\langle A\rangle_r + \\
&+\sum_k^K (-1)^{k}\binom{r}{k}\binom{n-r}{4-k}\langle A\rangle_r + \sum_k^K (-1)^{k}\binom{r}{k}\binom{n-r}{8-k}\langle A\rangle_r + \ldots
\end{aligned}
$$

Можем представить каждую сумму $\sum_k^K (-1)^k\binom{r}{k}\binom{n-r}{s-k}\langle A\rangle_r$ *в виде суммы* $\mathrm{aa}_1 + \mathrm{ba}_1 + \mathrm{ca}_1 + \mathrm{da}_1$. *Перегруппируем их и получим:*

$$
\begin{aligned}
\langle\partial\rangle_{\overline{0}}\langle A\rangle_r X = ((&\sum_{k=0 \ mod\ 4}\binom{r}{k})(\sum_{k=0 \ mod\ 4}\binom{n-r}{k}) - (\sum_{k=1 \ mod\ 4}\binom{r}{k})(\sum_{k=3 \ mod\ 4}\binom{n-r}{k}) + \\
&+(\sum_{k=2 \ mod\ 4}\binom{r}{k})(\sum_{k=2 \ mod\ 4}\binom{n-r}{k}) - (\sum_{k=3 \ mod\ 4}\binom{r}{k})(\sum_{k=1 \ mod\ 4}\binom{n-r}{k}))\langle A\rangle_r
\end{aligned}
$$

Список литературы

[1] Широков Д.С. - "Свертки по рангам и кватернионным типам в алгебрах Клиффорда"

[2] Linear and Geometric Algebra, Alan Macdonald;

[3] Eduardo Bayro-Corrochano Electrical Engineering and Computer Science Department CINVESTAV, Campus Guadalajara Jalisco, Mexico;

[4] Doran, C., and A. Lasenby. Physical applications of geometric algebra, 1999;

[5] Doran, C., and A. Lasenby. Geometric Algebra for Physicists. Cambridge University Press, 2003

[6] Hestenes, D., and G. Sobczyk. Clifford Algebra to Geometric Calculus. Reidel, 1984;

[7] Doran, C. Geometric Algebra and its Application to Mathematical Physics. Sidney Sussex College, February 1994;

[8] D. Lundholm, L. Svensson. Clifford algebra, geometric algebra, and applications. Department of Mathematics, KTH, 2009.