

Критерии проверки отбора в Экономическую школу ФЭН 2023

Базовая группа

Задача 1

№ 1 (базов)

а) $U = xy$
 $4x + 5y = 120, x \geq 0, y \geq 0$

$$y = \frac{120 - 4x}{5} = 24 - 0,8x$$

$$U = xy = (24 - 0,8x)x \rightarrow \max \quad (1 \text{ балл})$$

ЭПВВн \Rightarrow max в вершине (1 балл)

$$x_6 = \frac{24}{1,6} = 15 \geq 0 \quad (2 \text{ балла})$$

$$y = \frac{120 - 4 \cdot 15}{5} = 12 \geq 0$$

$$U_{\max} = 15 \cdot 12 = 180 \quad (1 \text{ балл})$$

б) $U = (40 + x)y$
 $4x + 5y = 120, x \geq 0, y \geq 0$

$$x = \frac{120 - 5y}{4} = 30 - 1,25y$$

$$U = (40 + 30 - 1,25y)y = 70y - 1,25y^2 \rightarrow \max \quad (1 \text{ балл})$$

ЭПВВн \Rightarrow max в вершине

$$y_6 = \frac{70}{2,5} = 28 \quad (1 \text{ балл})$$

$$x = \frac{120 - 5 \cdot 28}{4} = -5 \text{ - не можем быть}$$

м.к. $x \geq 0$

тогда y - наиб. из возможных, а $x=0$, (1 балл)

$$\text{тогда } y = \frac{120}{5} = 24, x=0 \quad (1 \text{ балл})$$

$$U_{\max} = 40 \cdot 24 = 960 \quad (1 \text{ балл})$$

в) $U = -xy$
 $4x + 5y = 120$

решение 1:

м.к. $x \geq 0$ и $y \geq 0$, то $-xy \leq 0 \Rightarrow U_{\max} = 0$ (5 баллов)

решение 2:

$$x = 30 - 1,25y$$

$$U = -(30 - 1,25y)y = -30y + 1,25y^2 \rightarrow \max \quad (1 \text{ балл})$$

ЭПВВв \Rightarrow U_{\max} на ограничениях ($y=0$ или $y=24$) (2 балла)

$$\text{при } y=0: U = -xy = 0$$

$$\text{при } y=24: x=0 \Rightarrow U = -xy = 0 \quad (1 \text{ балл})$$

$$U_{\max} = 0 \quad (1 \text{ балл})$$

г) $U = -(x+40)y$
 $4x + 5y = 120$

решение 1:

м.к. $x \geq 0$ и $y \geq 0$, то $(x+40)y \geq 0 \Rightarrow -(x+40)y \leq 0 \Rightarrow U_{\max} = 0$ (5 баллов)

решение 2:

$$x = 30 - 1,25y$$

$$U = -(30 - 1,25y + 40)y = -70y + 1,25y^2 \rightarrow \max \quad (1 \text{ балл})$$

ЭПВВв \Rightarrow максимум на ограничениях ($y=0$ или $y=24$) (2 балла)

$$\text{при } y=0: U = -(x+40)y = 0 \quad (1 \text{ балл})$$

$$\text{при } y=24: x=0 \Rightarrow U = -(x+40)y = 0$$

$$U_{\max} = 0 \quad (1 \text{ балл})$$

ЭПВВн – это парабола с ветвями вниз

ЭПВВв – это парабола с ветвями вверх

Задача 2

База # 2. (20 баллов) [РЕШЕНИЕ]

$$y_i = -2x_i^2 + 21x_i - i$$

+2 это парабола ветви вниз, значит максимум в вершине

$$+3 x_i = -\frac{21}{2(-2)} = 5,25$$

но $x_i \in \mathbb{N} \rightarrow$ берём ближайшее целое к вершине

$$+2 x_i = 5$$

независимо от i , y_i максимально, когда $x_i = 5$

$$+2 y_i^x = -2 \cdot 5^2 + 21 \cdot 5 - i = 55 - i$$

$$+1 Y = \sum_{i=1}^N y_i = \sum_{i=1}^N (55 - i) = 55N - \sum_{i=1}^N i$$

$$+2 \sum_{i=1}^N i = \frac{1+N}{2} \cdot N = 0,5N^2 + 0,5N$$

$$+1 Y = 55N - 0,5N^2 - 0,5N = -0,5N^2 + 54,5N$$

+2 это парабола ветви вниз, значит максимум в вершине

$$+3 N = -\frac{54,5}{2(-0,5)} = 54,5$$

$$+1 N = 54 \text{ шт}$$

$$+1 N = 55$$

Задача 3

$$\begin{cases} \frac{(x+2y-2)(x-11+2y)}{x+2y+1} \geq \frac{(2-x-2y)(x+2y-3)}{x+2y-3} \\ (2x-y)(2x-y-4) \leq 0 \end{cases}$$

Сделаем замену $x+2y=t$, $2x+y=q$:

$$\begin{cases} \frac{(t-2)(t-11)}{t+1} \geq \frac{(2-t)(t-3)}{t-3} \\ q(q-4) \leq 0 \end{cases}$$

В первом неравенстве перенесём всё направо от знака неравенства и упростим:

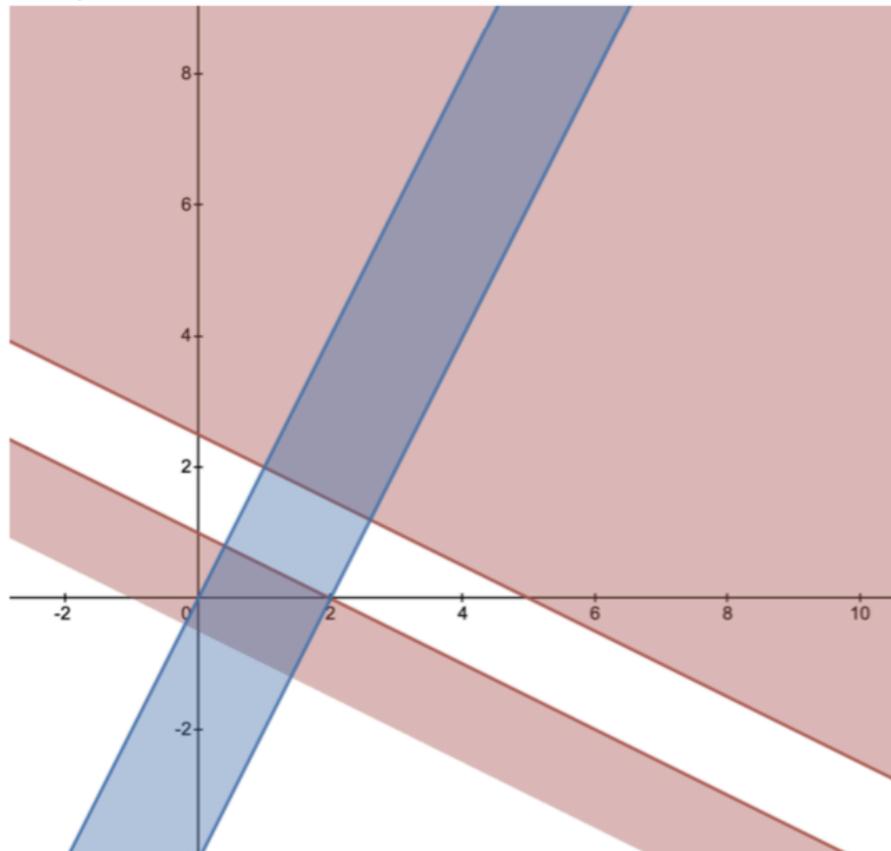
$$\begin{cases} (t-2) \left(\frac{t-11}{t+1} + \frac{t-3}{t-3} \right) \geq 0 \\ q(q-4) \leq 0 \\ \frac{(t-2)(t-3)(t-5)}{(t+1)(t-3)} \geq 0 \leq 0 \\ q(q-4) \end{cases}$$

Методом интервалов получаем

$$\begin{cases} -1 < t \leq 2 \\ t \geq 5 \\ 0 \leq q \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x+2y \leq 2 \\ x+2y \geq 5 \\ 0 \leq 2x+y \leq 4 \end{cases}$$

Получаем такой график (ответом являются области, закрашенные и красным и синим

цветом):



Задача 4

Отбор в Экономическую школу ФЭН

2023

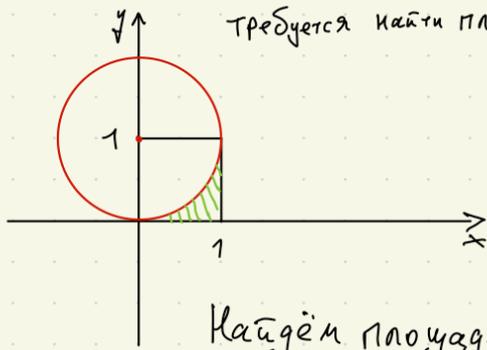
Базовая группа

Задача 4.

(20 баллов)

Дана окружность, которая описывается уравнением $x^2 + (y - 1)^2 = 1$. Также дан квадрат со стороной 1, диагональ которого проходит через точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$. В данном квадрате случайным образом выбирается одна точка. Найдите вероятность того, что она не попала в окружность (то есть отношение площади той части квадрата, которая не входит в окружность, ко всей площади квадрата).

Ступак Иван



Требуется найти площадь под сектором, делёную на площадь квадрата.

$$S_{\square} = 1^2 = 1 \quad (+5 \text{ баллов})$$

$$S_{\circ} = \pi R^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi \quad (+5 \text{ баллов})$$

$$\frac{S_{\circ}}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Найдём площадь под сектором: } S_{\square} - \frac{S_{\circ}}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Поделим площадь под сектором на } S_{\square}: \frac{1 - \frac{\pi}{4}}{1} = 1 - \frac{\pi}{4} \quad (+10 \text{ баллов})$$

-1 балл если человек взял $\pi = 3,14$ а не π .

(*) площадь под сектором выделена зелёным.

Задача 5

$$\begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_1 + d = b_1 q \quad (1) \\ a_1 + 9d = b_1 q^2 \quad (2) \end{cases} \quad \boxed{\begin{matrix} a_i = b_n \\ i = ? \end{matrix}}$$

$$(1) \quad q = \frac{a_1 + d}{b_1} = \frac{a_1 + d}{a_1} = 1 + \frac{d}{a_1}$$

$$(2) \quad a_1 + 9d = a_1 \left(1 + \frac{d}{a_1}\right)^2$$

$$a_1 + 9d = a_1 + 2d + \frac{d^2}{a_1}$$

$$d = 7a_1$$

$$(3) \quad q = \frac{a_1 + 7a_1}{a_1} = 8$$

$$b_n = 8^3 b_1 = 512 a_1$$

$$a_i = a_1 + d(i-1) = 512 a_1$$

$$a_1 + 7a_1(i-1) = 512 a_1 \quad | : a_1$$

$$i-1 = \frac{512-1}{7} = 73$$

$$i = 74$$

Критерии

+4 формулы прогрессии -2 арифметическая

+8 правильная система -2 $i=73$

+18 решение системы