Компактные схемы 4-го порядка точности для акустического волнового уравнения с переменной скоростью звука

К 100-летию статьи В.Б. Нумерова

А.А. Злотник

НИУ Высшая школа экономики (Москва), департамент математики

Конференция "Вычислительная математика и приложения"
5-9 августа 2024 г.
Международный математический центр Сириус

B.V. Numerov, A method of extrapolation of perturbations, Roy. Astron. Soc. Monthly Notices, 84 (**1924**).

Волновые задачи: волновое уравнение, **акустическое волновое уравнение**, телеграфное уравнение, различные слабо нелинейные уравнения, уравнения Максвелла ... : 2010-2024 гг.– десятки статей; S. Tsynkov. Одна из первых работ: А.Н. Валиуллин. Схемы повышенной точности для задач математической физики. Изд-во НГУ, 1973.

Компактные схемы: трехточечный шаблон по каждому направлению.

Три типа компактных разностных схем по характеру реализации

1. Схемы стандартного типа: нужны итерационные методы (при $n \geqslant 2$).
2. Экономичные схемы: методы с расщепляющимся оператором, локально-одномерные методы и т.д.
3. Полуявные векторные схемы (с дополнит. неизвестными), 2020 г.

Схемы всех трех типов **не являются явными** и **условно устойчивы**.

Стандарт анализа: анализ гармоник Фурье при постоянных коэфф. + 4-й порядок погрешности аппроксим. + численные тесты [достат. ли?]

Начально-краевая задача для **акустического волнового уравнения**

$$\rho(x)\partial_t^2 u(x,t) - Lu(x,t) = f(x,t),\ L := a_1^2\partial_1^2 + \ldots + a_n^2\partial_n^2,\ \text{в } Q_T := \Omega \times (0,T);$$
$$u|_{\Gamma_T} = g(x,t);\ u|_{t=0} = u_0(x),\ \partial_t u|_{t=0} = u_1(x),\ x \in \Omega := (0,X_1) \times \ldots \times (0,X_n).$$

Здесь $0 < \underline{\rho} \leqslant \rho(x) \leqslant \bar{\rho}$, $a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$ – постоянные, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 1$ (случай $n \geqslant 4$ для волновых задач используется в теорет. физ.)
Также $\partial\Omega$ – граница Ω, а $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0,T)$ – боковая поверхность Q_T.

Введем равномерную сетку $\overline{\omega}_{h_t}$ с узлами $t_m = mh_t$, $0 \leqslant m \leqslant M$ и шагом $h_t = \frac{T}{M}$ на $[0,T]$; $M \geqslant 2$. Пусть $\omega_{h_t} = \{t_m\}_{m=1}^{M-1}$.
Определим сеточное среднее, разностные отношения назад и вперед и оператор суммирования по времени с переменным верхним пределом

$$\bar{s}_t y = \frac{1}{2}(\check{y} + y),\quad \bar{\delta}_t y = \frac{y - \check{y}}{h_t},\quad \delta_t y = \frac{\hat{y} - y}{h_t},\quad \Lambda_t y = \delta_t \bar{\delta}_t y = \frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{h_t^2},$$
$$I_{h_t}^m y = h_t \sum_{l=1}^{m} y^l,\ 1 \leqslant m \leqslant M,\quad I_{h_t}^0 y = 0,$$

где $y^m = y(t_m)$, $\check{y}^m = y^{m-1}$, $\hat{y}^m = y^{m+1}$.

Введем равномерную сетку $\bar{\omega}_{hk}$ с узлами $x_{ki} = ih_k$, $0 \leqslant i \leqslant N_k$ и шагом $h_k = \frac{X_k}{N_k}$ по x_k. Пусть $\omega_{hk} = \{x_{ki}\}_{i=1}^{N_k-1}$.
Определим на ω_{hk} разностный аналог ∂_k^2 и среднее по Нумерову по x_k:

$$(\Lambda_k w)_i := \frac{1}{h_k^2}(w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}), \quad s_{kN} w_i := \frac{1}{12}(w_{i-1} + 10w_i + w_{i+1}),$$

где $w_i = w(x_{ki})$. Имеем $s_{kN} w_i = (I + \frac{1}{12} h_k^2 \Lambda_k) w_i$.
Введем прямоугольную сетку $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_{h1} \times \ldots \times \bar{\omega}_{hk}$ в $\bar{\Omega}$, где $h = (h_1, \ldots, h_n)$. Пусть $\omega_h = \omega_{h1} \times \ldots \times \omega_{hk}$ и $\partial\omega_h = \bar{\omega}_h \backslash \omega_h$. Определим сетки $\omega_{\mathbf{h}} := \omega_h \times \omega_{h_t}$ в Q_T и $\partial\omega_{\mathbf{h}} = \partial\omega_h \times \{t_m\}_{m=1}^M$ на $\bar{\Gamma}_T$, с $\mathbf{h} = (h, h_t)$.
Пусть H_h – пространство функций на $\bar{\omega}_h$, равных 0 на $\partial\omega_h$, со скалярным произведением L^2-типа

$$(v, w)_h = h_1 \ldots h_n \sum_{x_{\mathbf{i}} \in \omega_h} v(x_{\mathbf{i}}) w(x_{\mathbf{i}}), \quad x_{\mathbf{i}} = (i_1 h_1, \ldots, i_n h_n), \quad \mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_n).$$

Любой линейный оператор $C_h = C_h^* > 0$, действующий в H_h, порождает норму $\|w\|_{C_h} := (C_h w, w)_h^{1/2} = \|C_h^{1/2} w\|_h$ в H_h.
Введем простейшую аппроксимацию $L_h := a_1^2 \Lambda_1 + \ldots + a_n^2 \Lambda_n$ для L.

Альтернативный способ построения компактных схем (2021 г.)

Введем операторы усреднения и апроксимации f типа Нумерова

$$s_N := I + \tfrac{1}{12}(h_1^2\Lambda_1 + \ldots + h_n^2\Lambda_n), \quad s_{N\widehat{j}} := I + \tfrac{1}{12}\sum_{1\leqslant i\leqslant n,\, i\neq j} h_i^2\Lambda_i, \quad 1\leqslant j\leqslant n,$$

$$A_N := -(a_1^2 s_{N\widehat{1}}\Lambda_1 + \ldots + a_n^2 s_{N\widehat{n}}\Lambda_n), \quad f_N := s_N f + \tfrac{1}{12}h_t^2\Lambda_t f,$$

$$u_{1N} := s_N(\rho u_1) + \tfrac{1}{12}h_t^2(a_1^2\Lambda_1 + \ldots + a_n^2\Lambda_n)u_1,$$

$$f_N^0 := f_{dh_t}^{(0)} + \tfrac{1}{12}(h_1^2\Lambda_1 + \ldots + h_n^2\Lambda_n)f_0, \quad \text{где} \quad f_{dh_t}^{(0)} = f_d^{(0)} + \mathscr{O}(h_t^3),$$

на ω_h, с $f_d^{(0)} := f_0 + \frac{1}{3}h_t(\partial_t f)_0 + \frac{1}{12}h_t^2(\partial_t^2 f)_0$ и $y_0 := y|_{t=0}$.

Lemma 1 (аппроксимации 4-го порядка)

Для решения начально-краевой задачи верны формулы

$$s_N(\rho\Lambda_t u) - \tfrac{1}{12}h_t^2(a_1^2\Lambda_1 + \ldots + a_n^2\Lambda_n)\Lambda_t u + A_N u - f_N = \mathscr{O}(|\mathbf{h}|^4) \ \text{на} \ \omega_{\mathbf{h}},$$

$$s_N(\rho\delta_t u)^0 - \tfrac{h_t^2}{12}(a_1^2\Lambda_1 + \ldots + a_n^2\Lambda_n)(\delta_t u)^0 + \tfrac{h_t}{2}A_N u_0 - u_{1N} - \tfrac{h_t}{2}f_N^0$$
$$= \mathscr{O}(|\mathbf{h}|^4) \ \text{на} \ \omega_h.$$

Альтернативный способ построения компактных схем (2021 г.)

Стандартный способ: на основе выделения главного члена погрешности аппроксимации, его аппроксимации и добавления в схему.

Альтернативный способ: введем усреднение по x_k вида

$$(q_k w)(x_k) = \frac{1}{h_k}\int_{-h_k}^{h_k} w(x_k+\xi)\Big(1-\frac{|\xi|}{h_k}\Big)\,d\xi,$$

связанное с линейными конечными элементами. Верны формулы

$$q_k\partial_k^2 w = \Lambda_k w, \quad q_k w = w + q_k\rho_{k2}(\partial_k^2 w),$$

$$q_k w = w + \tfrac{1}{12}h_k^2\partial_k^2 w + q_k\rho_{k4}(\partial_k^4 w) = w + \tfrac{1}{12}h_k^2\Lambda_k w + \tilde{\rho}_{k4}(\partial_k^4 w),$$

$$|q_k\rho_{ks}(\partial_k^s w)| \leqslant c_s h_k^s\|\partial_k^s w\|_{C(I_{kl})},\ s=2,4,\ \ |\tilde{\rho}_{k4}(\partial_k^4 w)| \leqslant \tilde{c}_4 h_k^4\|\partial_k^4 w\|_{C(I_{kl})}$$

в узлах $x_k = x_{kl}$, $1\leqslant l\leqslant N_k-1$, где $I_{kl} := \big[x_{k(l-1)}, x_{k(l+1)}\big]$.

Применим оператор $\bar{q}q_t$ с $\bar{q} := q_1\ldots q_n$ к уравнению в узлах сетки:

$$\bar{q}(\rho\Lambda_t u) - (a_1^2\bar{q}_{\hat{1}}q_t\Lambda_1 u + \ldots + a_n^2\bar{q}_{\hat{n}}q_t\Lambda_n u) = \bar{q}q_t f, \ \text{ с } \ \bar{q}_{\hat{i}} := \prod_{1\leqslant k\leqslant n,\,k\neq i} q_k.$$

Указанные выше разложения с $q_1,\ldots,q_n, q_{n+1}=q_t$ приводят к первой формуле.

Когда $f^{(0)}_{dh_t} = f^{(0)}_d + \mathscr{O}(h_t^3)$ для $f^{(0)}_d := f_0 + \frac{1}{3}h_t(\partial_t f)_0 + \frac{1}{12}h_t^2(\partial_t^2 f)_0$:

$$f^{(0)}_{dh_t} = \frac{7}{12}f^0 + \frac{1}{2}f^1 - \frac{1}{12}f^2 \quad \text{или} \quad f^{(0)}_{dh_t} = \frac{1}{3}f^0 + \frac{2}{3}f^{1/2} \text{ с } f^{1/2} := f|_{t=h_t/2}.$$

Проблема: оператор s_N почти вырожденный при $n=3$ (и теряет свойство $s_N > 0$ при $n > 3$).
Одной из наиболее удачных является комп. схема (для всех $n \geqslant 1$)

$$\bar{s}_N(\rho\Lambda_t v) + \frac{1}{12}h_t^2\bar{A}_N\Lambda_t v + \bar{A}_N v = f_N \quad \text{на} \quad \omega_{\mathbf{h}},$$

$$v|_{\partial\omega_{\mathbf{h}}} = g, \quad \bar{s}_N(\rho\delta_t v^0) + \frac{1}{12}h_t^2\bar{A}_N\delta_t v^0 + \frac{1}{2}h_t\bar{A}_N v^0 = u_{1N} + \frac{1}{2}h_t f_N^0 \quad \text{на} \quad \omega_h$$

особенно при $n \geqslant 3$, с операторами (где $s_{kN} = I + \frac{1}{12}h_k^2\Lambda_{kN}$)

$$\bar{s}_N := \prod_{k=1}^{n} s_{kN}, \ \bar{A}_N := -(a_1^2\bar{s}_{N\widehat{1}}\Lambda_1 + \ldots + a_n^2\bar{s}_{N\widehat{n}}\Lambda_n), \ \bar{s}_{N\widehat{l}} := \prod_{1\leqslant k\leqslant n, k\neq l} s_{kN},$$

где $\bar{s}_N$ – расщепленный оп-р s_N. Все они таковы, что $C_h = C_h^* > 0$ в H_h.
Фактически же, например, при $n=3$ нетрудно построить двухпараметрическое семейство компактных схем 4-го порядка.

Theorem 2 (об устойчивости компактной схемы (2023 г.))

Пусть $g=0$ *в краевом условии* (3) *и выполнено условие на шаги*

$$h_t^2\left(\tfrac{a_1^2}{h_1^2}+\ldots+\tfrac{a_n^2}{h_n^2}\right)\leqslant(1-\varepsilon_0^2)\underline{\rho}\quad \text{с некоторым}\quad 0<\varepsilon_0<1$$

(оно соответствует принципу замороженных коэффициентов).
Тогда с $B_h=\bar{s}_N$, $A_h=\bar{A}_N$ *при любых* f_N*:* $\{t_m\}_{m=0}^{M-1}\to H_h$ *и* $u_{1N}\in H_h$ *верны: 1) оценка в (стандартной) энергетической норме*

$$\max_{1\leqslant m\leqslant M}\left(\varepsilon_0^2\|\sqrt{\rho}\,\bar{\delta}_t v^m\|_h^2+\|\bar{s}_t v^m\|_{B_h^{-1}A_h}^2\right)^{1/2}$$

$$\leqslant\left(\|v^0\|_{B_h^{-1}A_h}^2+\varepsilon_0^{-2}\left\|\tfrac{1}{\sqrt{\rho}}B_h^{-1}u_{1N}\right\|_h^2\right)^{1/2}+2\varepsilon_0^{-1}\left\|\tfrac{1}{\sqrt{\rho}}B_h^{-1}f_N\right\|_{L_{h_t}^1(H_h)},$$

где f_N*-слагаемое может быть также взято в альтернативном виде*

$$2I_{h_t}^{M-1}\|B_h^{-1/2}A_h^{-1/2}\bar{\delta}_t f_N\|_h+3\max_{0\leqslant m\leqslant M-1}\|B_h^{-1/2}A_h^{-1/2}f_N^m\|$$

2) оценка в слабой энергетической норме

$$\max_{0\leqslant m\leqslant M} \max\left\{\varepsilon_0\|\sqrt{\rho}v^m\|_h,\, \|I_{h_t}^m \bar{s}_t v\|_{B_h^{-1}A_h}\right\}$$
$$\leqslant \|\sqrt{\rho}v^0\|_h + 2\|B_h^{-1/2}A_h^{-1/2}u_{1N}\|_h + 2\|B_h^{-1/2}A_h^{-1/2}f_N\|_{L^1_{h_t}(H_h)},$$

где для $f_N = \delta_t d$ можно f_N-слагаемое заменить на

$$2\varepsilon_0^{-1} I_{h_t}^M \left\| \tfrac{1}{\sqrt{\rho}} B_h^{-1}\left(d - s_t d^0\right)\right\|_h.$$

Нет условий малости h и равномерность по T по v_0 и u_{1N} (важно).
Оценки типа 2) менее популярны, но важны для обоснования вычисл. устойчивости по v^0.

В теореме ниже граничная функция g произвольна (не только $g = 0$).

Theorem 3 (об оценке погрешности 4-го порядка)

При $v^0 = u_0$ на $\bar{\omega}_h$ верна оценка погрешности в энергетической норме

$$\max_{1\leqslant m\leqslant M}\left[\varepsilon_0\|\sqrt{\rho}\,\bar{\delta}_t(u-v)^m\|_h + \|\bar{s}_t(u-v)^m\|_{A_h}\right] = \mathscr{O}(|\mathbf{h}|^4).$$

Быстрые итерационные методы реализации

Уравнение на верхнем слое по времени

$$B_h(\rho w) + \tfrac{1}{12}h_t^2 A_h w = b \ \text{ в } \ H_h, \tag{1}$$

с коммутирующими операторами $B_h^* = B_h > 0$ и $A_h^* = A_h > 0$.
Неоднородное краевое условие $v|_{\partial\omega_\mathbf{h}} = g$ $v|_{\partial\omega_\mathbf{h}} = 0$ считаем сведенным к однородному модификацией f_N и u_{1N} в узлах ω_h, ближайших к $\partial\omega_h$.
Нестандартный одношаговый итерац. метод с постоянным параметром $\theta > 0$:

$$B_h\Big(\rho\,\tfrac{w^{(l+1)} - w^{(l)}}{\theta}\Big) + B_h(\rho w^{(l)}) + \tfrac{1}{12}h_t^2 A_h w^{(l)} = b, \quad l \geqslant 0.$$

Эквивалентная практическая форма

$$w^{(l+1)} = w^{(l+1)}(\theta) := (1-\theta)w^{(l)} - \tfrac{\theta}{\rho}B_h^{-1}\big(\tfrac{1}{12}h_t^2 A_h w^{(l)} - b\big), \quad l \geqslant 0.$$

Для $B_h = \bar{s}_N$ применение B_h^{-1} реализуется легко.
Этот и N-шаговый метод быстро сходятся на практике (обычно до 10 итераций). Есть варианты этих методов с вариационным выбором параметров.

Theorem 4 (о скорости сходимости одношагового метода)

Пусть выполнено условие на шаги из теоремы устойчивости с параметром $0 \leqslant \varepsilon_0 < 1$. *При* $\theta := \theta_{opt} = 2/(1+\bar{\lambda}(\varepsilon_0^2))$, *где* $\bar{\lambda}(\varepsilon_0^2) := 1 + \frac{1}{2}(1-\varepsilon_0^2)$, *верна оценка скорости сходимости*

$$\|w - w^{(l)}\| \leqslant q_0^l \|w - w^{(0)}\|, \quad l \geqslant 0, \quad \forall w^{(0)} \in H_h,$$

в двух нормах $\|\cdot\| = \|\sqrt{\rho}\cdot\|_h$ *и* $\|\cdot\|_{\mathscr{A}_\mathbf{h}}$, *с* $\mathscr{A}_\mathbf{h} := D_\rho + \frac{1}{12}h_t^2 B_h^{-1} A_h$ *и*

$$q_0 = q_0(\varepsilon_0^2) := \frac{\bar{\lambda}(\varepsilon_0^2) - 1}{\bar{\lambda}(\varepsilon_0^2) + 1} = \frac{1-\varepsilon_0^2}{5-\varepsilon_0^2} \leqslant 0.2 \quad \textit{на} \quad [0,1).$$

Введем также N-шаговый итерац. метод с чебышевскими параметрами

$$w^{(l+1)} = (1-\theta^{(l)})w^{(l)} - \tfrac{\theta^{(l)}}{\rho} B_h^{-1}\left(\tfrac{1}{12}h_t^2 A_h w^{(l)} - b\right), \tag{2}$$

$$\theta^{(l)} := \frac{\theta_{opt}}{1 + q_0 \cos\frac{\pi(l+1/2)}{N}}, \quad l = 0, \dots, N-1. \tag{3}$$

Theorem 5 (о скорости сходимости N-шагового метода)

Пусть выполнено условие на шаги из теоремы устойчивости с $0 \leqslant \varepsilon_0 < 1$. Для N-шагового метода верна оценка скорости сходимости

$$\|w - w^{(N)}\| \leqslant \tfrac{2q_1^N}{1+2q_1^N}\|w - w^{(0)}\| \quad \forall w^{(0)} \in H_h,$$

в двух нормах $\|\cdot\| = \|\sqrt{\rho}\cdot\|_h$ и $\|\cdot\|_{\mathscr{A}_\mathbf{h}}$, с параметром

$$q_1 = q_1(\varepsilon_0^2) := \frac{\bar\lambda^{1/2}(\varepsilon_0^2) - 1}{\bar\lambda^{1/2}(\varepsilon_0^2) + 1} = \frac{1-\varepsilon_0^2}{5 - \varepsilon_0^2 + 4\sqrt{1 + \frac{1}{2}(1-\varepsilon_0^2)}} \leqslant \frac{1}{5 + 4\sqrt{1.5}}$$

$$\approx 0.1010 \quad \text{на} \quad [0,1).$$

Важно, что q_0 и q_1 **не зависят от h и ρ**, в частности, от разброса значений $\overline{\rho}/\underline{\rho}$. При этом $q_0(\frac{1}{2}) = \frac{1}{9} \approx 0.1111$ и $q_0(\frac{3}{4}) \approx 0.05882$; часто уже $q_0 = 0.5$ считается хорошим.
Также $q_1(\frac{1}{2}) \approx 0.05573$ и $q_1(\frac{3}{4}) \approx 0.02944$. Нетрудно видеть, что

$$0.5 < \frac{q_1(\varepsilon_0^2)}{q_0(\varepsilon_0^2)} \leqslant \frac{5}{5+4\sqrt{1.5}} \approx 0.5051 \quad \text{на} \quad [0,1),$$

и $\frac{q_1}{q_0}$ убывает на $[0,1)$. Также $q_l(\varepsilon_0^2) \to 0$ при $\varepsilon_0 \to 1-0$, $l = 0,1$.
Выбор начального приближения обсуждался в литературе.
Простейший – это $v^{m+1,(0)} = v^m$, $0 \leqslant m \leqslant M-1$
или $v^{m+1,(0)} = 2v^m - v^{m-1}$, $1 \leqslant m \leqslant M-1$.
Но существенно лучше находить их из близких по структуре уравнений

$$(\Lambda_t v)^{m,(0)} = -\tfrac{1}{\rho} B_h^{-1}(A_h v^m - f^m) \quad \text{в} \quad H_h, \quad 1 \leqslant m \leqslant M-1,$$
$$(\delta_t v^0)^{(0)} = -\tfrac{1}{\rho} B_h^{-1}\left(\tfrac{1}{2} h_t A_h v^0 - u_1 - \tfrac{1}{2} h_t f^0\right) \quad \text{в} \quad H_h,$$

что подтверждается в численных эксперимпентах.

Этот и последующие компактные методы допускают обобщение на неравномерные прямоугольные сетки по $x_1,\ldots,x_n$ и t, со снижением порядка локальной аппроксимации до 3-го.

Практический порядок сходимости p зависит от сетки, и для "регулярных" сеток в численных экспериментах может оставаться 4-м. Например, при $n=1$ для степенной функции распределения узлов $x_k=(\frac{k}{N})^\alpha$ на $[0,1]$ оказывалось, что для гладких решений и равномерной сеточной нормы $p=4$ при $\alpha=\frac{3}{2}$, $p\approx 3.6$ при $\alpha=\frac{3}{4}$, $p\approx 3$ при $\alpha=\frac{5}{8}$, $p\approx 2.4$ при $\alpha=\frac{1}{2}$.

Строгих "положительных" теоретических результатов **нет совсем**. Основная проблема – **несамосопряженность** оператора усреднения Нумерова s_N для неравномерной сетки. Поэтому спектральная задача

$$-\Lambda w=\lambda s_N w,\quad w\in H_h,\quad w\neq 0, \tag{4}$$

может иметь **комплексные собственные значения** $\lambda=\lambda_R+i\lambda_I$ с $\lambda_I\neq 0$, что не только резко усложняет анализ, но и ухудшает свойства рассмотренной компактной схемы.
Найдены простые примеры таких сеток при сколь угодно больших N.

Пусть $f_N = 0$ и $\|\cdot\|_h$, $\|\cdot\|_{1h}$ – **любые** фиксированные нормы в H_h.

Theorem 6

Если задача (4) имеет собственное значение с $\lambda_I \neq 0$, то равномерная по времени оценка решения компактной схемы

$$\sup_{m \geqslant 0} \|v^m\|_h \leqslant C(\|v^0\|_h + \|u_{1N}\|_{1h}) \quad \forall v^0, u_{1N} \in H_h,$$

выполняться не может.

Theorem 7

Для выполнения оценки

$$\|v^m\|_h \leqslant C(1 + \varkappa h_t)^m \|v^0\|_h + \|u_{1N}\|_{1h}) \quad \forall v^0, u_{1N} \in H_h, \quad m \geqslant 0$$

с $\varkappa > 0$ необходимо выполнение условий

$$\frac{1}{6} a^2 h_t^2 \max\{|\lambda_R|, 2|\lambda_I|\} \leqslant 1 + \mathscr{O}(h_t), \; a^2 |\lambda_I| h_t \leqslant \frac{9}{2} \varkappa + \mathscr{O}(h_t), \quad h_t \to 0.$$

Как следствие, можно построить несложную последовательность неравномерных сеток такую, что для выполнения оценки из последней теоремы должно выполняться жесткое условие устойчивости

$$c_0 h_t \leqslant \varkappa h_\omega^2 \quad - \text{здесь не } h_t^2 (!)$$

с $c_0 > 0$ не зависящим от $\varkappa$ и сетки, $h_\omega = \frac{X}{N}$ – средний шаг, при достаточно малых h_t.

При его нарушении в численных примерах показан катастрофический рост приближенного решения.

Сначала введем компактную схему с расщепляющимся оператором

$$\bar{B}_{\sigma N}(\rho\Lambda_t v)+\bar{A}_N v=f_N \ \text{ на } \ \omega_{\mathbf{h}}, \tag{5}$$

$$v|_{\partial\omega_{\mathbf{h}}}=g,\ \ \bar{B}_{\sigma N}(\rho\delta_t v^0)+\tfrac{1}{2}h_t\bar{A}_N v^0=u_{1N}+\tfrac{1}{2}h_t f_N^0 \ \text{ на } \ \omega_h, \tag{6}$$

где расщепляющийся оператор $\bar{B}_{\sigma N}=B_{1\sigma N}\dots B_{n\sigma N}$ имеет сомножители

$$B_{k\sigma N}:=s_{kN}-\frac{\sigma}{\underline{\rho}}h_t^2a_k^2\Lambda_k=I+\left(\tfrac{1}{12}h_k^2-\frac{\sigma}{\underline{\rho}}h_t^2a_k^2\right)\Lambda_k,\ \ k=1,\dots,n,$$

с параметром σ. Сомножители имеют пост. коэфф. и коммутируют.

Уравнения этой схемы имеют погрешн. аппроксимации $\mathscr{O}(h_t^2+|h|^4)$. Для схемы доказаны теорема устойчивости в энергетической норме (при $\sigma>\frac{1}{4}$ устойч. абсолютная) и оценка погрешности $\mathscr{O}(h_t^2+|h|^4)$. При $\rho(x)\equiv\underline{\rho}$ и $\sigma=\frac{1}{12}$ погрешность аппроксимации уже $\mathscr{O}(h_t^4+|h|^4)$, и верны теорема усл. устойчивости и оценка погрешности $\mathscr{O}(h_t^4+|h|^4)$. Построенные же ранее схемы с расщепл. оператором при $\rho(x)\not\equiv const$, строго говоря, не были **ни компактными, ни 4-го порядка аппроксимации**.

Компактная схема с расщепл. оператором с аппрокс. $\mathcal{O}(h_t^4+|h|^4)$ (2022 г.)

Построим родственную схему с расщепляющимся оператором

$$\bar{B}_{\rho N}(\rho\Lambda_t v)+\bar{A}_N v=f_N \ \text{ на } \ \omega_{\mathbf{h}},$$

$$v|_{\partial\omega_{\mathbf{h}}}=g,\ \ \bar{B}_{\rho N}(\rho\delta_t v^0)+\tfrac{1}{2}h_t\bar{A}_N v^0=u_{1N}+\tfrac{1}{2}h_t f_N^0 \ \text{ на } \ \omega_h,$$

где $\bar{B}_{\rho N}:=B_{1\rho N}\dots B_{n\rho N}$ имеет сомножители

$$B_{k\rho N}:=s_{kN}-\tfrac{1}{12}h_t^2a_k^2\Lambda_k D_{1/\rho}=I+\tfrac{1}{12}\Lambda_k\big(h_k^2I-h_t^2a_k^2D_{1/\rho}\big),\ k=1,\dots,n,$$

с $D_{1/\rho}:=\frac{1}{\rho}I$. Они с переменными коэффициентами $\Rightarrow$ не коммутируют $\Rightarrow$ проблемы в теории. Эта схема совпадает с предыдущей при $\rho(x)\equiv\mathrm{const}$ и $\sigma=\frac{1}{12}$.

Доказано, что она имеет 4-й порядок погрешности аппроксимации:

$$\bar{B}_{\rho N}(\rho\Lambda_t u)+\bar{A}_N u-f_N=\mathcal{O}(|\mathbf{h}|^4) \ \text{ на } \ \omega_{\mathbf{h}},$$

$$\bar{B}_{\rho N}(\rho\delta_t u^0)+\tfrac{1}{2}h_t\bar{A}_N u_0-(u_{1N}+\tfrac{1}{2}h_t f_N^0)=\mathcal{O}(|\mathbf{h}|^4) \ \text{ на } \ \omega_h.$$

Реализация – быстрая прямая. Численные эксперименты успешные.

Трехслойная полуявная векторная компактная схема

$$\rho\Lambda_t v - \left(\rho I + \tfrac{1}{12}h_t^2 L_h\right)\tfrac{1}{\rho}\left(a_1^2 v_{11} + \ldots + a_n^2 v_{nn}\right) = f_{\mathbf{h}}, \tag{7}$$

$$s_{kN} v_{kk} = \Lambda_k v \ \text{ на } \ \omega_{\mathbf{h}}, \ \ 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{8}$$

с основной искомой функцией $v \approx u$ и вспомогательными функциями $v_{11} \approx u_{11}, \ldots, v_{nn} \approx u_{nn}$. Их набор – искомая вектор-функция.
Эта схема дополняется сеточными краевыми условиями

$$v|_{\partial\omega_{\mathbf{h}}} = g, \ \ a_k^2 v_{kk}|_{\partial\omega_{\mathbf{h}}} = g_k, \ \ 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{9}$$

где в силу краевого усл. $u|_{\Gamma_T} = g$ и акуст. волнового уравнения в $\bar{Q}_T$:

$$g_k = \rho\partial_t^2 g - \sum_{1\leqslant l\leqslant n,\, l\neq k} a_l^2 \partial_l^2 g - f \ \text{ при } x_k = 0, X_k,$$

$$g_k = a_k^2 \partial_k^2 g \ \text{ при } x_l = 0, X_l, \ 1 \leqslant l \leqslant n, \ l \neq k,$$

на частях Γ_T. При $g = 0$ правые части этих формул равны $-f$ и 0.
При $n = 2$, $\rho \equiv 1$: Y. Jiang, Y. Ge, An explicit 4th-order compact difference scheme for solving the 2D wave equation. Adv. Difference Equat. 415, 1–14

Нужно также найти $v^m|_{m=1}$ с 4-м порядком аппроксимации. Часто это делается явно на основе формулы Тейлора и волнового уравнения, и возникают производные высшего порядка ρ, u_0 и u_1. Это неприменимо при негладких u_0 и u_1. Вместо этого построим уравнение для v^1, аналогичное основным уравнениям схемы

$$\rho(\delta_t v)^0 = \tfrac{1}{2}h_t\big(\rho I + \tfrac{1}{12}h_t^2 L_h\big)\tfrac{1}{\rho}\big(a_1^2 v_{11}^0 + \ldots + a_n^2 v_{nn}^0\big) + u_{1\mathbf{h}} + \tfrac{1}{2}h_t f_{\mathbf{h}}^0, \qquad (10)$$

$$s_{kN} v_{kk}^0 = \Lambda_k v^0 \ \text{ на } \ \omega_h, \ \ 1 \leqslant k \leqslant n, \qquad (11)$$

где используются специальные $u_{1\mathbf{h}} \approx \rho u_1$ и $f_{\mathbf{h}}^0 \approx f_0 = f|_{t=0}$ такие, что

$$u_{1\mathbf{h}} := \big(\rho I + \tfrac{1}{6}h_t^2 L_h\big)u_1, \ \ f_{\mathbf{h}}^0 := f_{dh_t}^{(0)} + \tfrac{1}{12}h_t^2 L_h \tfrac{f_0}{\rho} \ \text{ на } \ \omega_h,$$

$$f_{dh_t}^{(0)} = \tfrac{7}{12}f^0 + \tfrac{1}{2}f^1 - \tfrac{1}{12}f^2 \ \text{ или } \ f_{dh_t}^{(0)} = \tfrac{1}{3}f^0 + \tfrac{2}{3}f^{1/2}, \ \text{ с } \ f^{1/2} := f|_{t=h_t/2},$$

а v_{kk}^0 на $\partial\omega_h$ можно взять как в (9). Погрешность уравнения (10):

$$\hat{\psi}^0 := \rho(\delta_t u)^0 - \tfrac{1}{2}h_t\big(\rho I + \tfrac{1}{12}h_t^2 L_h\big)\tfrac{1}{\rho}\big(a_1^2 u_{11\,0} + \ldots + a_n^2 u_{nn\,0}\big) - u_{1\mathbf{h}} - \tfrac{1}{2}h_t f_{\mathbf{h}}^0$$

$$= \mathscr{O}(|\mathbf{h}|^4) \ \text{ на } \ \omega_h.$$

Перейдем к неоднородным уравнениям

$$s_{kN}v_{kk}^m = \Lambda_k v^m + b_k^m \ \text{ на } \ \omega_h, \ \ 0 \leqslant m \leqslant M-1, \ \ 1 \leqslant k \leqslant n,$$

с заданными функциями $b_1, \ldots, b_n$. На практике из-за ошибок округления не бывает $b_1 = \ldots = b_n = 0$, поэтому надо изучить влияние $b_1, \ldots, b_n$ на v. Это также **необходимо** для вывода оценок погрешности.

Введем два самосопряженных оператора в H_h:

$$E_h := -(a_1^2 s_{1N}^{-1}\Lambda_1 + \ldots + a_n^2 s_{nN}^{-1}\Lambda_n), \ \ I_{\rho\mathbf{h}} := \tfrac{1}{\rho}I + \tfrac{1}{12}h_t^2\big(\tfrac{1}{\rho}L_h\big)\tfrac{1}{\rho}I.$$

Верны неравенства $-L_h < E_h < -(3/2)L_h$ и $I_{\rho\mathbf{h}} < \rho^{-1}I \leqslant \underline{\rho}^{-1}I$.

Введем первое условие на h_t и $h_1, \ldots, h_n$:

$$\tfrac{1}{3}h_t^2\big(\tfrac{a_1^2}{h_1^2} + \ldots + \tfrac{a_n^2}{h_n^2}\big) \leqslant (1-\varepsilon)\underline{\rho} \ \text{ при некотором } \ 0 < \varepsilon < 1. \qquad (12)$$

Theorem 8 (условная устойчивость в расширенной энерг. норме)

Пусть выполнены условие (12) *и* $\frac{1}{4}h_t^2 E_h \leqslant (1-\varepsilon_0^2)\underline{\rho} I$ *при некотором* $0<\varepsilon_0<1$, *а* $g=g_1=\ldots=g_n=0$ *в краевых условиях* (9). *Тогда для обобщенной полуявной векторной схемы верны оценки*

$$\max_{0\leqslant m\leqslant M} \max\left\{\varepsilon_0\|v^m\|_{E_h},\, \|I_{h_t}^m \bar{s}_t E_h v\|_{I_{\rho\mathbf{h}}}\right\}$$

$$\leqslant \|v^0\|_{E_h} + 2\Big\|\tfrac{1}{\rho}u_{1\mathbf{h}}\Big\|_{I_{\rho\mathbf{h}}^{-1}} + 2\Big\|I_{\rho\mathbf{h}}^{-1/2}\big[\tfrac{1}{\rho}(f_{\mathbf{h}}+\beta_{\mathbf{h}})\big]\Big\|_{\tilde{L}^1_{h_t}(H_h)},$$

$$\varepsilon_0 \max_{1\leqslant m\leqslant M} \|\bar{\delta}_t v^m\|_{I_{\rho\mathbf{h}}^{-1}}$$

$$\leqslant (1+\varepsilon_0)\|v^0\|_{E_h} + (3+2\varepsilon_0)\Big(\Big\|\tfrac{1}{\rho}u_{1\mathbf{h}}\Big\|_{I_{\rho\mathbf{h}}^{-1}} + \Big\|I_{\rho\mathbf{h}}^{-1/2}\big[\tfrac{1}{\rho}(f_{\mathbf{h}}+\beta_{\mathbf{h}})\big]\Big\|_{\tilde{L}^1_{h_t}(H_h)}\Big),$$

при любых функциях $f_{\mathbf{h}}, b_1,\ldots,b_n$: $\{t_m\}_{m=0}^{M-1} \to H_h$ *и* $v^0, u_{1\mathbf{h}} \in H_h$ *и*

$$\beta_{\mathbf{h}}^m := \rho I_{\rho\mathbf{h}}(a_1^2 s_{1N}^{-1} b_1^m + \ldots + a_n^2 s_{nN}^{-1} b_n^m) \ \text{ в } \ H_h,\ \ 0\leqslant m\leqslant M-1.$$

Пусть $\|w\|_{H_h^1} := \|w\|_{-\Lambda_h} = (-\Lambda_h w, w)_h^{1/2}$ – сеточный аналог нормы в подпространстве Соболева $H_0^1(\Omega)$, где $\Lambda_h = \Lambda_1 + \ldots + \Lambda_n$.
Следующая теорема выводится на основе теоремы устойчивости.
Подчеркнем, что в ней g и $f|_{\Gamma_T}$ – произвольные (а не только нулевые).

Theorem 9 (оценка погрешности 4-го порядка)

Пусть выполнены оба условия устойчивости, и $v^0 = u^0$ на $\bar{\omega}_h$. Тогда для полуявной векторной схемы верны оценка погрешности $u - v$ в расширенной энергетической норме и оценки погрешности $\partial_k^2 u - v_{kk}$ в более слабых "негативных" нормах

$$\sqrt{\varepsilon}\varepsilon_0 \max_{1 \leqslant m \leqslant M} \left(\|\bar{\delta}_t (u-v)^m\|_h + \|(u-v)^m\|_{H_h^1} + \sqrt{\varepsilon} \|I_{h_t}^m L_h (u-v)\|_h \right) = \mathscr{O}(|\mathbf{h}|^4),$$

$$\sqrt{\varepsilon}\varepsilon_0 \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \max_{0 \leqslant m \leqslant M-1} \|(-\Lambda_k)^{-1/2} (\partial_k^2 u^m - v_{kk}^m)\|_h = \mathscr{O}(|\mathbf{h}|^4).$$

Здесь величины $\mathscr{O}(|\mathbf{h}|^4)$ не зависят от ε и ε_0.

Основные публикации

1. Zlotnik A., Lomonosov T. On stability and error bounds of an explicit in time higher-order vector compact scheme for the multidimensional wave and acoustic wave equations, Appl. Numer. Math. 2024. V. 195. P. 54-74.

2. Zlotnik A., Čiegis R. On construction and properties of compact 4th order finite-difference schemes for the variable coefficient wave equation, J. Sci. Comput. 2023. V. 95. No. 1. Article 3.

3. Zlotnik A., Čiegis R. On higher-order compact ADI schemes for the variable coefficient wave equation, Appl. Math. Comput. 2022. V. 412. Article 126565.

4. Zlotnik A., Čiegis R. A compact higher-order finite-difference scheme for the wave equation can be strongly non-dissipative on non-uniform meshes, Appl. Math. Lett. 2021. V. 115. Article 106949.

5. Zlotnik A., Kireeva O. On compact 4th order finite-difference schemes for the wave equation, Math. Model. Anal. 2021. V. 26. No. 3. P. 479-502.