

# Полуявный векторный компактный метод для решения волнового уравнения

А.А. Злотник

НИУ Высшая школа экономики (Москва), департамент математики

XIII Всероссийская конференция  
«Актуальные проблемы прикладной математики и механики»,  
посвященная памяти академика А.Ф. Сидорова  
2-8 сентября 2024 г. Джанхот

- Начально-краевая задача для акустического волнового уравнения
- Построение схемы
- Теоремы устойчивости и оценка погрешности 4-го порядка
- Численные результаты – негладкий случай
- Численные результаты – слоистая среда
- Численный пример - отсутствие отражений от границ резкой смены шага сетки

## Начально-краевая задача для акустического волнового уравнения

$$\rho(x)\partial_t^2 u(x,t) - Lu(x,t) = f(x,t), \quad L := a_1^2 \partial_1^2 + \dots + a_n^2 \partial_n^2, \quad \text{в } Q_T := \Omega \times (0, T);$$
$$u|_{\Gamma_T} = g(x,t); \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad \partial_t u|_{t=0} = u_1(x), \quad x \in \Omega := (0, X_1) \times \dots \times (0, X_n).$$

Здесь  $0 < \underline{\rho} \leq \rho(x) \leq \bar{\rho}$ ,  $a_1 > 0, \dots, a_n > 0$  – постоянные,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $n \geq 1$  (случай  $n \geq 4$  для волновых задач используется в теорет. физ.)

Также  $\partial\Omega$  – граница  $\Omega$ , а  $\Gamma_T = \partial\Omega \times (0, T)$  – боковая поверхность  $Q_T$ .

Введем равномерную сетку  $\bar{\omega}_{h_t}$  с узлами  $t_m = mh_t$ ,  $0 \leq m \leq M$  и шагом  $h_t = \frac{T}{M}$  на  $[0, T]$ ;  $M \geq 2$ . Пусть  $\omega_{h_t} = \{t_m\}_{m=1}^{M-1}$ .

Определим сеточные операторы

$$\bar{s}_t y = \frac{1}{2}(\check{y} + y), \quad \bar{\delta}_t y = \frac{y - \check{y}}{h_t}, \quad \delta_t y = \frac{\hat{y} - y}{h_t}, \quad \Lambda_t y = \delta_t \bar{\delta}_t y = \frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{h_t^2},$$

$$I_{h_t}^m y = h_t \sum_{l=1}^m y^l, \quad 1 \leq m \leq M, \quad I_{h_t}^0 y = 0,$$

где  $y^m = y(t_m)$ ,  $\check{y}^m = y^{m-1}$ ,  $\hat{y}^m = y^{m+1}$ .

Введем равномерную сетку  $\bar{\omega}_{hk}$  с узлами  $x_{ki} = ih_k$ ,  $0 \leq i \leq N_k$  и шагом  $h_k = \frac{X_k}{N_k}$  по  $x_k$ . Пусть  $\omega_{hk} = \{x_{ki}\}_{i=1}^{N_k-1}$ .

Определим на  $\omega_{hk}$  разностный аналог  $\partial_k^2$  и среднее по Нумерову по  $x_k$ :

$$(\Lambda_k w)_i := \frac{1}{h_k^2}(w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}), \quad s_{kN} w_i := \frac{1}{12}(w_{i-1} + 10w_i + w_{i+1}),$$

где  $w_i = w(x_{ki})$ . Имеем  $s_{kN} w_i = (I + \frac{1}{12} h_k^2 \Lambda_k) w_i$ .

Введем прямоугольную сетку  $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_{h1} \times \dots \times \bar{\omega}_{hk}$  в  $\bar{\Omega}$ , где  $h = (h_1, \dots, h_n)$ . Пусть  $\omega_h = \omega_{h1} \times \dots \times \omega_{hk}$  и  $\partial \omega_h = \bar{\omega}_h \setminus \omega_h$ . Определим сетки  $\omega_{\mathbf{h}} := \omega_h \times \omega_{h_t}$  в  $Q_T$  и  $\partial \omega_{\mathbf{h}} = \partial \omega_h \times \{t_m\}_{m=1}^M$  на  $\bar{\Gamma}_T$ , с  $\mathbf{h} = (h, h_t)$ . Пусть  $H_h$  – пространство функций на  $\bar{\omega}_h$ , равных 0 на  $\partial \omega_h$ , со скалярным произведением  $L^2$ -типа

$$(v, w)_h = h_1 \dots h_n \sum_{x_{\mathbf{i}} \in \omega_h} v(x_{\mathbf{i}}) w(x_{\mathbf{i}}), \quad x_{\mathbf{i}} = (i_1 h_1, \dots, i_n h_n), \quad \mathbf{i} = (i_1, \dots, i_n).$$

Введем простейшую аппроксимацию  $L_h := a_1^2 \Lambda_1 + \dots + a_n^2 \Lambda_n$  для  $L$ .

## Построение полуявной векторной схемы (с дополнительными неизвестными)

Формальная замена акуст. волн. уравн. на систему уравнений со 2-ми частными производными по  $t$  или  $x_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ :

$$\rho(x)\partial_t^2 u(x,t) - (a_1^2 u_{11}(x,t) + \dots + a_n^2 u_{nn}(x,t)) = f(x,t), \quad u_{kk}(x,t) := \partial_k^2 u(x,t),$$

где  $u_{11}, \dots, u_{nn}$  – дополнительные искомые функции.

Дифференцирование акуст. волн. уравн. по  $t$  дает

$$\rho \partial_t^4 u = \partial_t^2 (Lu + f) = L \partial_t^2 u + \partial_t^2 f = L \left[ \frac{1}{\rho} (Lu + f) \right] + \partial_t^2 f.$$

Поэтому можно выполнить такие преобразования

$$\begin{aligned} \rho \Lambda_t u &= \rho \partial_t^2 u + \frac{1}{12} h_t^2 \rho \partial_t^4 u + \mathcal{O}(h_t^4) \\ &= \left( \rho I + \frac{1}{12} h_t^2 L \right) \left( \frac{1}{\rho} Lu \right) + f + \frac{1}{12} h_t^2 \left( \partial_t^2 f + L \frac{f}{\rho} \right) + \mathcal{O}(h_t^4) \\ &= \left( \rho I + \frac{1}{12} h_t^2 L_h \right) \frac{1}{\rho} (a_1^2 u_{11} + \dots + a_n^2 u_{nn}) + f_{\mathbf{h}} + \mathcal{O}(|\mathbf{h}|^4), \\ &\quad \text{с } f_{\mathbf{h}} := f + \frac{1}{12} h_t^2 (\Lambda_t f + L_h \frac{f}{\rho}). \end{aligned}$$

Уравнение с  $\partial_k^2 u(x,t)$  – это ОДУ по  $x_k$ , и для его аппрокс. Нумерова

$$s_{kN} u_{kk} - \Lambda_k u = \mathcal{O}(h_k^4) \quad \text{на } \omega_{\mathbf{h}}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Опустим остаточные члены – получится *трехслойная полуявная векторная компактная схема*

$$\rho \Lambda_t v - \left( \rho I + \frac{1}{12} h_t^2 L_h \right) \frac{1}{\rho} (a_1^2 v_{11} + \dots + a_n^2 v_{nn}) = f_h, \quad (1)$$

$$s_{kN} v_{kk} = \Lambda_k v \quad \text{на } \omega_h, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (2)$$

с основной искомой функцией  $v \approx u$  и вспомогательными функциями  $v_{11} \approx u_{11}, \dots, v_{nn} \approx u_{nn}$ . Их набор – искомая вектор-функция.

Эта схема дополняется сеточными краевыми условиями

$$v|_{\partial \omega_h} = g, \quad a_k^2 v_{kk}|_{\partial \omega_h} = g_k, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (3)$$

где в силу краевого усл.  $u|_{\Gamma_T} = g$  и акуст. волнового уравнения в  $\bar{Q}_T$ :

$$g_k = \rho \partial_t^2 g - \sum_{1 \leq l \leq n, l \neq k} a_l^2 \partial_l^2 g - f \quad \text{при } x_k = 0, X_k,$$

$$g_k = a_k^2 \partial_k^2 g \quad \text{при } x_l = 0, X_l, \quad 1 \leq l \leq n, \quad l \neq k,$$

на частях  $\Gamma_T$ . При  $g = 0$  правые части этих формул равны  $-f$  и  $0$ .

При  $n = 2$ ,  $\rho \equiv 1$ : Y. Jiang, Y. Ge, *An explicit 4th-order compact difference scheme for solving the 2D wave equation. Adv. Difference Equat.* 415, 1–14

(2020). Такой подход применен и для многих других типов дифф. уравнений.

Найдем  $v^m|_{m=1}$  с 4-м порядком аппроксимации <sup>1</sup>. Часто это делается явно на основе формулы Тейлора и волнового уравнения, и возникают производные высшего порядка  $\rho$ ,  $u_0$  и  $u_1$ . Это неприменимо при негладких  $u_0$  и  $u_1 \Rightarrow$  построим уравнение для  $v^1$ , аналогичное основным уравнениям схемы

$$\rho(\delta_t v)^0 = \frac{1}{2}h_t(\rho I + \frac{1}{12}h_t^2 L_h) \frac{1}{\rho} (a_1^2 v_{11}^0 + \dots + a_n^2 v_{nn}^0) + u_{1\mathbf{h}} + \frac{1}{2}h_t f_{\mathbf{h}}^0, \quad (4)$$

$$s_{kN} v_{kk}^0 = \Lambda_k v^0 \quad \text{на } \omega_h, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (5)$$

где используются специальные  $u_{1\mathbf{h}} \approx \rho u_1$  и  $f_{\mathbf{h}}^0 \approx f_0 = f|_{t=0}$  такие, что

$$u_{1\mathbf{h}} := (\rho I + \frac{1}{6}h_t^2 L_h) u_1, \quad f_{\mathbf{h}}^0 := f_{dh_t}^{(0)} + \frac{1}{12}h_t^2 L_h \frac{f_0}{\rho} \quad \text{на } \omega_h,$$

$$f_{dh_t}^{(0)} = \frac{7}{12}f^0 + \frac{1}{2}f^1 - \frac{1}{12}f^2 \quad \text{или} \quad f_{dh_t}^{(0)} = \frac{1}{3}f^0 + \frac{2}{3}f^{1/2}, \quad \text{с } f^{1/2} := f|_{t=h_t/2},$$

а  $v_{kk}^0$  на  $\partial\omega_h$  можно взять как в (3). Погрешн. аппрокс. уравнения (4):

$$\rho(\delta_t u)^0 - \frac{1}{2}h_t(\rho I + \frac{1}{12}h_t^2 L_h) \frac{1}{\rho} (a_1^2 u_{110} + \dots + a_n^2 u_{nn0}) - u_{1\mathbf{h}} - \frac{1}{2}h_t f_{\mathbf{h}}^0 = \mathcal{O}(|\mathbf{h}|^4).$$

<sup>1</sup>Zlotnik A., Lomonosov T. On stability and error bounds of an explicit in time higher-order vector compact scheme for the multidimensional wave and acoustic wave equations, Appl. Numer. Math. 2024. V. 195. P. 54-74.

## Устойчивость векторной схемы в расширенной энергетической норме

Перейдем к неоднородным уравнениям

$$s_{kN} v_{kk}^m = \Lambda_k v^m + b_k^m \quad \text{на } \omega_h, \quad 0 \leq m \leq M-1, \quad 1 \leq k \leq n,$$

с заданными функциями  $b_1, \dots, b_n$ . На практике из-за ошибок округления не бывает  $b_1 = \dots = b_n = 0$ , поэтому надо изучить влияние  $b_1, \dots, b_n$  на  $v$ . Это также **необходимо** для вывода оценок погрешности.

Введем два самосопряженных оператора в  $H_h$ :

$$E_h := -(a_1^2 s_{1N}^{-1} \Lambda_1 + \dots + a_n^2 s_{nN}^{-1} \Lambda_n), \quad I_{\rho h} := \frac{1}{\rho} I + \frac{1}{12} h_t^2 \left( \frac{1}{\rho} L_h \right) \frac{1}{\rho} I.$$

Верны неравенства  $-L_h < E_h < -(3/2)L_h$  и  $I_{\rho h} < \rho^{-1} I \leq \underline{\rho}^{-1} I$ .

Введем первое условие на  $h_t$  и  $h_1, \dots, h_n$ :

$$\frac{1}{3} h_t^2 \left( \frac{a_1^2}{h_1^2} + \dots + \frac{a_n^2}{h_n^2} \right) \leq (1 - \varepsilon) \underline{\rho} \quad \text{при некотором } 0 < \varepsilon < 1. \quad (6)$$

Тогда можно оценить  $I_{\rho h}$  снизу и вывести двусторонние оценки

$$\varepsilon \frac{1}{\rho} I \leq \varepsilon \frac{1}{\rho} I < I_{\rho h} < \frac{1}{\rho} I \leq \frac{1}{\underline{\rho}} I \Leftrightarrow \underline{\rho} I \leq \rho I < I_{\rho h}^{-1} < \varepsilon^{-1} \rho I \leq \varepsilon^{-1} \bar{\rho} I.$$



## Theorem 1 (условная устойчивость в расширенной энерг. норме)

Пусть выполнены условие (6) и  $\frac{1}{4}h_t^2 E_h \leq (1 - \varepsilon_0^2) \underline{\rho} I$  при некотором  $0 < \varepsilon_0 < 1$ , а  $g = g_1 = \dots = g_n = 0$  в краевых условиях (3). Тогда для обобщенной полуявной векторной схемы верны оценки

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq m \leq M} \max \{ \varepsilon_0 \|v^m\|_{E_h}, \|I_{h_t}^m \bar{s}_t E_h v\|_{I_{\rho h}} \} \\ & \leq \|v^0\|_{E_h} + 2 \left\| \frac{1}{\rho} u_{1h} \right\|_{I_{\rho h}^{-1}} + 2 \left\| I_{\rho h}^{-1/2} \left[ \frac{1}{\rho} (f_h + \beta_h) \right] \right\|_{\tilde{L}_{h_t}^1(H_h)}, \\ & \quad \varepsilon_0 \max_{1 \leq m \leq M} \left\| \bar{\delta}_t v^m \right\|_{I_{\rho h}^{-1}} \\ & \leq (1 + \varepsilon_0) \|v^0\|_{E_h} + (3 + 2\varepsilon_0) \left( \left\| \frac{1}{\rho} u_{1h} \right\|_{I_{\rho h}^{-1}} + \left\| I_{\rho h}^{-1/2} \left[ \frac{1}{\rho} (f_h + \beta_h) \right] \right\|_{\tilde{L}_{h_t}^1(H_h)} \right), \end{aligned}$$

при любых функциях  $f_h, b_1, \dots, b_n: \{t_m\}_{m=0}^{M-1} \rightarrow H_h$  и  $v^0, u_{1h} \in H_h$  и

$$\beta_h^m := \rho I_{\rho h} (a_1^2 s_{1N}^{-1} b_1^m + \dots + a_n^2 s_{nN}^{-1} b_n^m) \quad \text{в } H_h, \quad 0 \leq m \leq M-1.$$

Доказательство: на основе результата об устойчивости абстрактной трехслойной схемы в расширенной слабой энергетической норме, исключения вспомогательных неизвестных  $v_{11}, \dots, v_{nn}$  и надлежащей симметризации возникающего замкнутого уравнения для  $v$ .

Доказана также устойчивость в **сильной энергетической норме**

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq m \leq M} \left( \varepsilon_0^2 \|\bar{\delta}_t v^m\|_{E_h}^2 + \|\bar{s}_t E_h v^m\|_{I_{\rho h}}^2 \right)^{1/2} \leq \\ & \leq \left( \|E_h v^0\|_{I_{\rho h}}^2 + \varepsilon_0^{-2} \left\| \frac{1}{\rho} u_{1h} \right\|_{E_h}^2 \right)^{1/2} + 2\varepsilon_0^{-1} \|E_h^{1/2} \left( \frac{1}{\rho} (f_h + \beta_h) \right)\|_{L_{h_t}^1(H_h)} \end{aligned}$$

и соответствующий дискретный закон сохранения энергии.

Оба условия устойчивости выполнены при

$$h_t^2 \left( \frac{a_1^2}{h_1^2} + \dots + \frac{a_n^2}{h_n^2} \right) \leq \min \left\{ 3(1 - \varepsilon), \frac{2}{3}(1 - \varepsilon_0^2) \right\} \underline{\rho}.$$

При  $0 < \varepsilon \leq 7/9$  это условие только в 1.5 раза жестче, чем аналогичное условие для стандартной явной трехслойной схемы 2-го порядка точности. Множитель 1.5 – оценка нормы операторов  $s_{kN}^{-1}$ .

Пусть  $\|w\|_{H_h^1} := \|w\|_{-\Lambda_h} = (-\Lambda_h w, w)_h^{1/2}$  – сеточный аналог нормы в подпространстве Соболева  $H_0^1(\Omega)$ , где  $\Lambda_h = \Lambda_1 + \dots + \Lambda_n$ .

$\|y\|_{\mathcal{E}_h} := (\|\bar{\delta}_t y\|_h^2 + \|w\|_{-L_h}^2)^{1/2}$  – сеточная энергетическая норма.

Следующая теорема выводится на основе теоремы устойчивости.

Подчеркнем, что в ней  $g$  и  $f|_{\Gamma_T}$  – произвольные (а не только нулевые).

## Theorem 2 (оценка погрешности 4-го порядка)

Пусть выполнены оба условия устойчивости, и  $v^0 = u^0$  на  $\bar{\omega}_h$ . Тогда для полуявной векторной схемы верны оценка погрешности  $u - v$  в расширенной энергетической норме

$$\sqrt{\varepsilon} \varepsilon_0 \max_{1 \leq m \leq M} (\|\bar{\delta}_t (u - v)^m\|_h + \|(u - v)^m\|_{H_h^1} + \sqrt{\varepsilon} \|I_{h_t}^m L_h (u - v)\|_h) = \mathcal{O}(|\mathbf{h}|^4)$$

и оценки погрешности  $\partial_k^2 u - v_{kk}$  в более слабых “негативных” нормах

$$\sqrt{\varepsilon} \varepsilon_0 \max_{1 \leq k \leq n} \max_{0 \leq m \leq M-1} \|(-\Lambda_k)^{-1/2} (\partial_k^2 u^m - v_{kk}^m)\|_h = \mathcal{O}(|\mathbf{h}|^4).$$

Здесь величины  $\mathcal{O}(|\mathbf{h}|^4)$  не зависят от  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_0$ .

## Случай негладких данных

Сравним полуявную компактную схему 4-го порядка и стандартную явную схему 2-го порядка:

$$\begin{aligned} \rho \Lambda_t v - L_h v &= f \quad \text{на } \omega_h, \\ \rho \delta_t v^0 - \frac{h_t}{2} L_h v^0 &= \rho u_1 + \frac{h_t}{2} f^0 \quad \text{на } \omega_h, \quad v|_{\partial \omega_h} = g, \quad v^0 = u_0 \quad \text{на } \omega_h. \end{aligned}$$

Рассмотрим численный метод  $k$ -го порядка аппроксимации начально-краевой задачи для волнового уравнения. Можно ожидать, что для  $u_0 \in H^{\lambda,2}$  (пространства С.М. Никольского функций гладкости  $\lambda$  и при степени суммируемости 2) и  $u_1 \in H^{\lambda-1,2}$  погрешности  $e_{L_h^2}$  и  $e_{H_h^1}$  (вместе с  $e_{\mathcal{E}_h}$ ) имеют порядки сходимости соответственно

$$p = \frac{k}{k+1} \lambda \quad \text{при } 0 \leq \lambda \leq k+1, \quad \frac{k}{k+1} (\lambda - 1) \quad \text{при } 1 \leq \lambda \leq k+2.$$

Возьмем разрывную функцию  $w_0(r) = \begin{cases} 1, & r < r_0 \\ 0, & r > r_0 \end{cases} \in H^{1/2,2}$ .

Пусть  $\Omega = (-1/2, 1/2)^3$ ,  $a_1 = a_2 = a_3 = 1/\sqrt{3}$ ,  $T = 0.3$  и  $r_0 = 0.2$ .

**Таблица 1:** Погрешности и порядки сходимости при разрывной второй начальной функции  $u_1 = w_0$

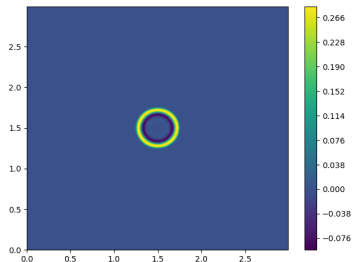
	$N$	$M$	$e_{L_h^2}$	$e_{H_h^1}$	$e_{\mathcal{E}_h}$	$P_{L_h^2}$	$P_{H_h^1}$	$P_{\mathcal{E}_h}$
$k = 4$	81	27	2.17e-4	3.95e-2	3.38e-2	—	—	—
	135	45	1.33e-4	3.21e-2	2.73e-2	0.968	0.407	0.422
	225	75	6.68e-5	2.59e-2	2.25e-2	1.341	0.418	0.377
	375	125	3.32e-5	2.14e-2	1.83e-2	1.371	0.376	0.397
	*	*	—	—	—	1.200	0.400	0.400
$k = 2$	81	27	3.54e-4	5.36e-2	4.47e-2	—	—	—
	135	45	2.17e-4	4.60e-2	3.79e-2	0.964	0.297	0.323
	225	75	1.23e-4	3.92e-2	3.27e-2	1.102	0.313	0.286
	375	125	7.09e-5	3.37e-2	2.79e-2	1.083	0.298	0.311
	*	*	—	—	—	1.000	0.333	0.333

При  $k = 4$  погрешности меньше, а практич. порядки сходимости выше, чем для  $k = 2$  – **важный общий факт** для самых разных гиперболич. задач (но не эллиптических или параболич.) с негладкими данными.

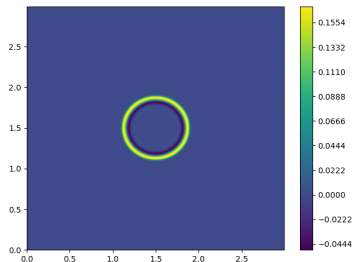
**Волны в трехслойной среде.** Скорости звука 1.5, 1 и 3 км/сек в левом, среднем и правом слоях по  $x$  области  $\Omega = (0, X)^3$  с  $X = 3$  км (ширина слоев по 1 км). Полагаем  $\rho = 4/9, 1$  и  $1/9$  (сек/км)<sup>2</sup> в слоях. Источник: сглаженный вейвлет типа Рикера (популярный в геофизике)

$$f(x, y, z, t) = \varphi_\gamma(r) \psi(t), \text{ с } \varphi_\gamma(r) = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{3/2} e^{-\gamma r^2}, \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_\gamma(r) dx dy dz = 1,$$

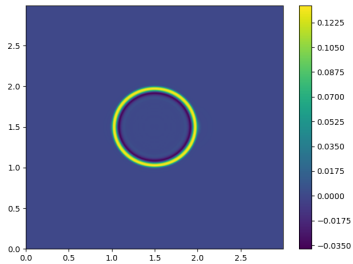
где  $\psi(t) = \sin(50t)e^{-200t^2}$  и  $r = |(x - x_0, y - y_0, z - z_0)|$ ,  $(x_0, y_0, z_0) = (1.5, 1.5, 1.5)$  — центр  $\Omega$ , а  $\gamma = 10000$ . Берем  $u_0 = u_1 = 0$ .



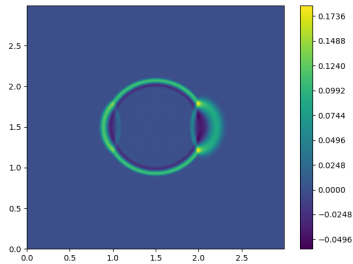
$(t = 0.25)$



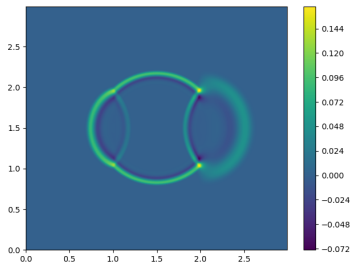
$(t = 0.4)$



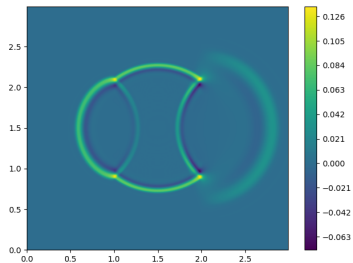
$(t = 0.5)$



$(t = 0.6)$



$(t = 0.7)$



$(t = 0.8)$

Рис. 1: Волновые поля в сечении  $z = 1.5$

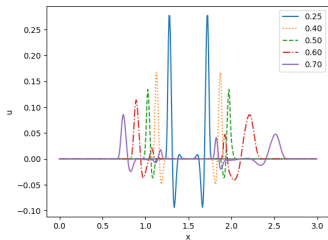
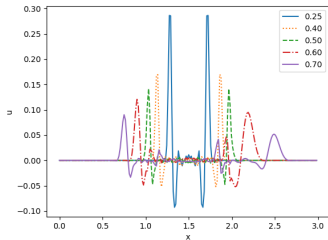


Рис. 2: Волны при  $y = z = 1.5$ : слева при  $h = 0.015, h_t = 1/350$ ; справа при  $h = 0.0075, h_t = 1/700$ .

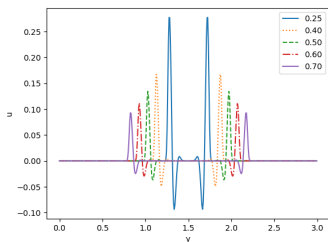
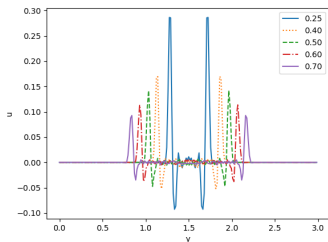


Рис. 3: Волны при  $x = z = 1.5$  и прежних шагах



## Отсутствие отражений от границ резкой смены шага сетки

Данный пример аналогичен <sup>2</sup>. Решается волновое уравнение с  $\rho(x) \equiv 1$  в  $\bar{\Omega} = [-2, 2] \times [-2, 2]$  при локализованном начальном возмущении

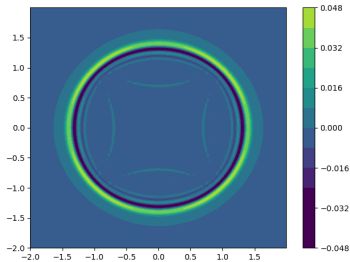
$$u_0(x_1, x_2) = \cos^4 \frac{\pi x_1}{0.2} \cos^4 \frac{\pi x_2}{0.2} \cdot \mathbf{1}_{[-0.1, 0.1]^2}(x_1, x_2),$$

где  $\mathbf{1}_E(x_1, x_2)$  – индикаторная функция  $E$ , при  $f = u_1 = g = 0$ .

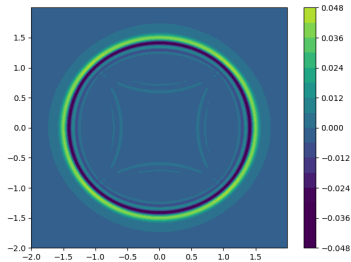
Используются кусочно-постоянные сетки по  $x_1, x_2$  с шагом  $h_1 = h_2 = \frac{1}{60}$  внутри сегмента  $[-1, 1]$  и в 8 раз меньшим шагом  $h_1 = h_2 = \frac{1}{480}$  вне его. Известно, что в подобных случаях для схем 2-го порядка возникают паразитические отражения от границ смены шага, и здесь они движутся к центру области противоположно движению фронта расширяющейся волны. Здесь также в точках  $(\pm 1, \pm 1)$  возникают паразитические всплески (лучше заметные на 3Д графиках).

Для схемы 4-го порядка такие негативные явления не заметны, а общее качество численного решения существенно выше.

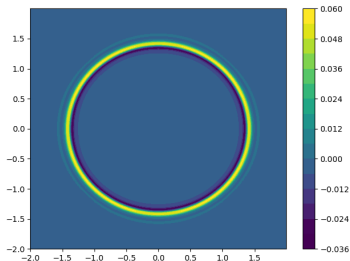
<sup>2</sup>A.S. Anisimova, Yu.M. Laevsky, On reflected waves in the solutions of difference problems for the wave equation on non-uniform meshes, Sib. Electron. Math. Rep. 15 (2018) 759–767.



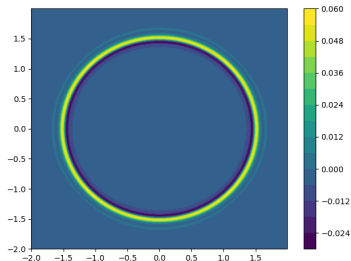
$t = 1.4$



$t = 1.5$



$t = 1.4$



$t = 1.5$

Рис. 4: Сверху: решение с паразитич. осцилляциями для явной схемы 2-го порядка. Снизу: решение без них для компактной схемы 4-го порядка.